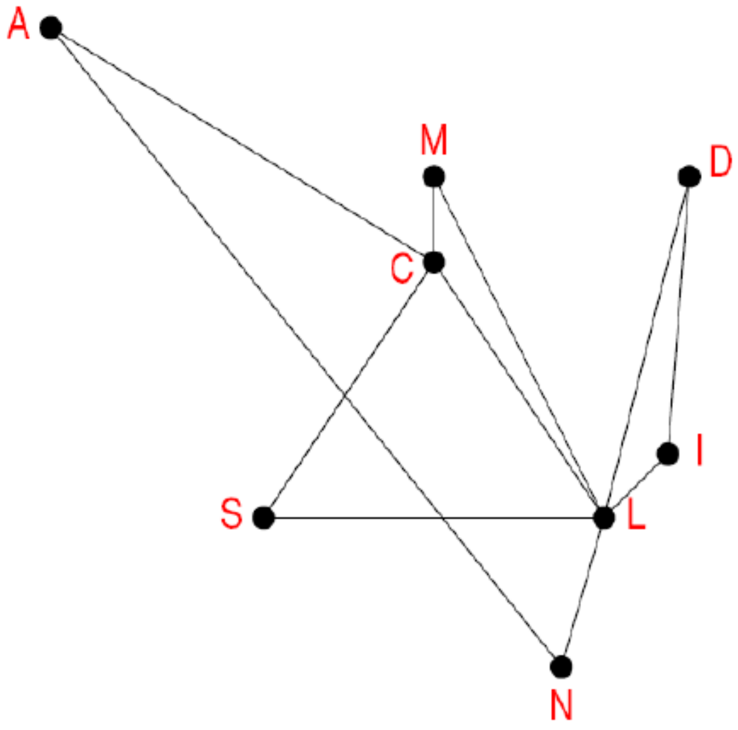
Árvore Geradora Mínima

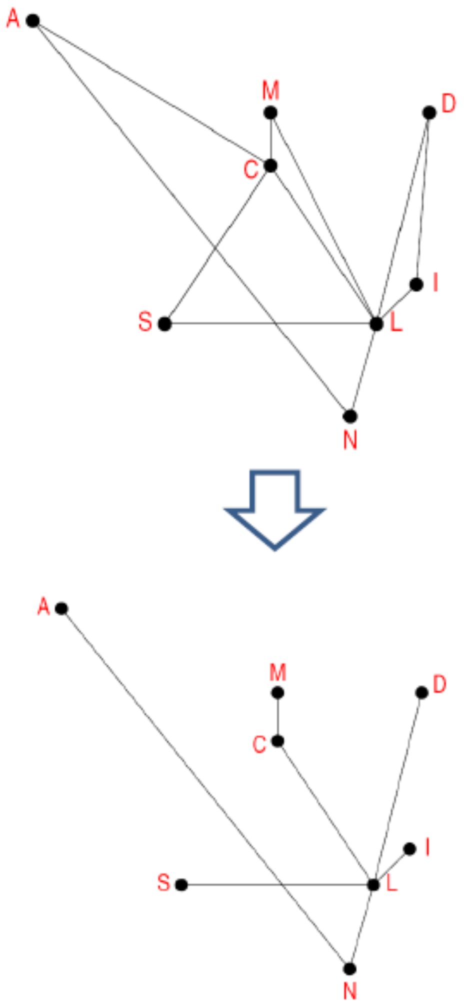
Adaptado de H. C. B. Oliveira

Árvore Geradora Mínima

- Suponha que uma companhia aérea recebeu permissão para voar nas rotas da figura...
- Mas por questões de economia, a empresa não irá operar em todas as vias...
- E ao mesmo tempo precisa atender a toda a demanda aérea do país... Afinal, os passageiros podem fazer conexões...



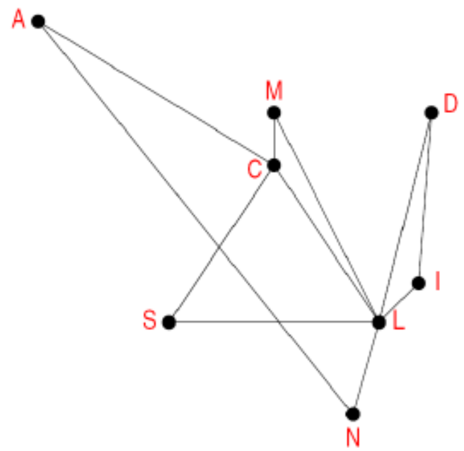
Árvore Geradora Mínima



- A segunda figura mostra uma forma de atender toda a demanda, interconectando todas as cidades.
- Este conjunto de rotas é mínimo?
  - Sem considerar os pesos...

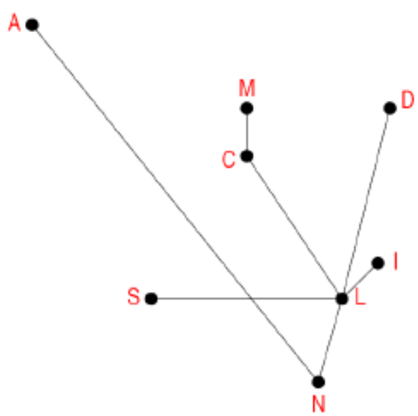
Árvore Geradora Mínima

$$G = (V, A)$$



- Este conjunto de rotas é mínimo?
  - Sim. Qualquer árvore de um grafo de |V| vértices possui |V|-1 arestas.

$$G' = (V, X)$$



$$|X| = |V| - 1$$

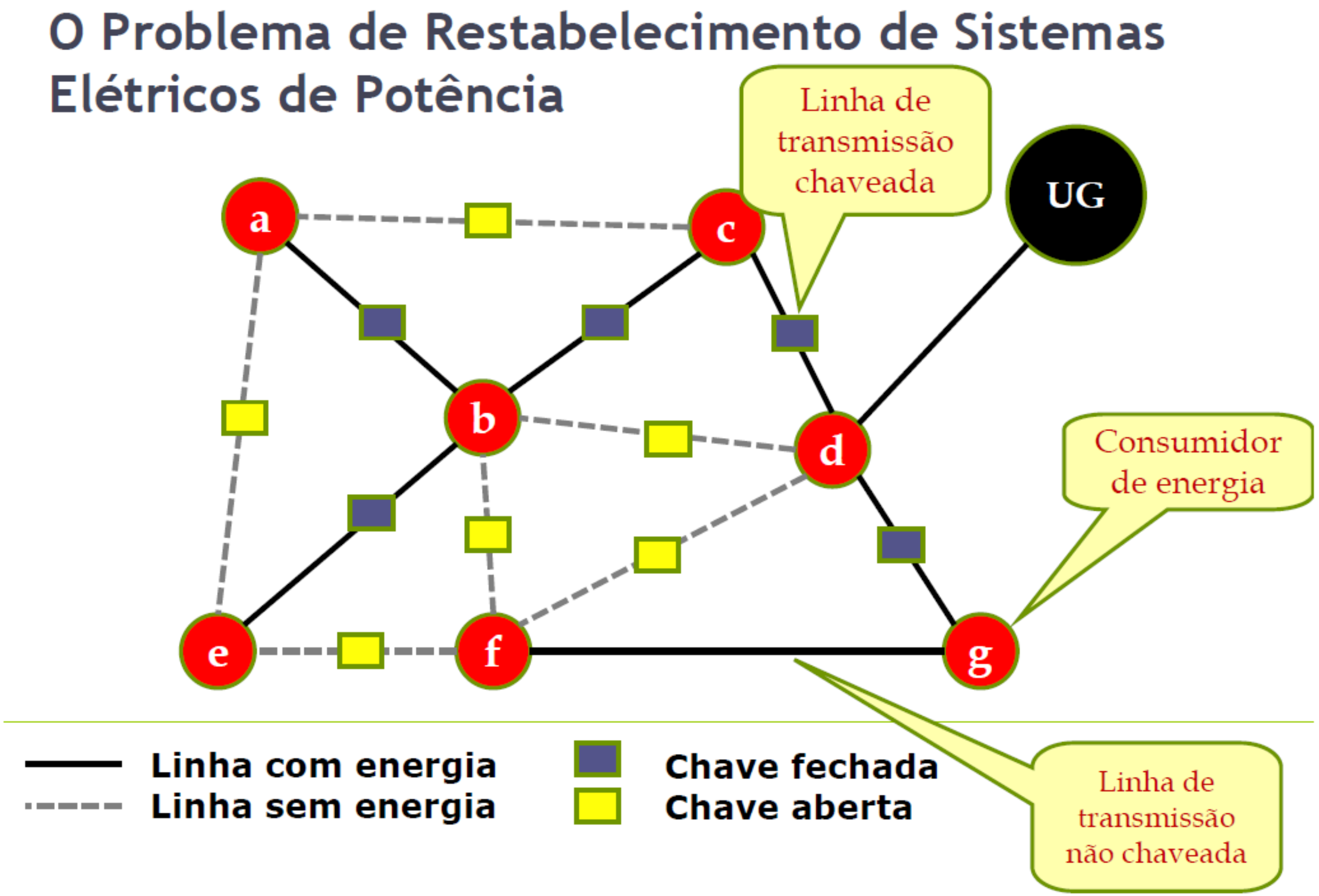
Árvore Geradora Mínima

- História:
  - O cientista checo Otakar Borůvka criou o primeiro algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima em 1926. Ele queria resolver o problema de encontrar uma eficiente cobertura elétrica de Moravia (Região da República Checa);
  - Atualmente este é conhecido como Algoritmo de Borůvka.

Árvore Geradora Mínima

- **Aplicações da AGM:**
  - Transporte aéreo;
  - Transporte terrestre;
  - Redes de computadores;
    - Exemplo: "Dynamic Minimal Spanning Tree Routing Protocol for Large Wireless Sensor Networks":
      - http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4026014&tag=1
  - Redes elétricas;
  - Circuitos integrados;
  - Etc...

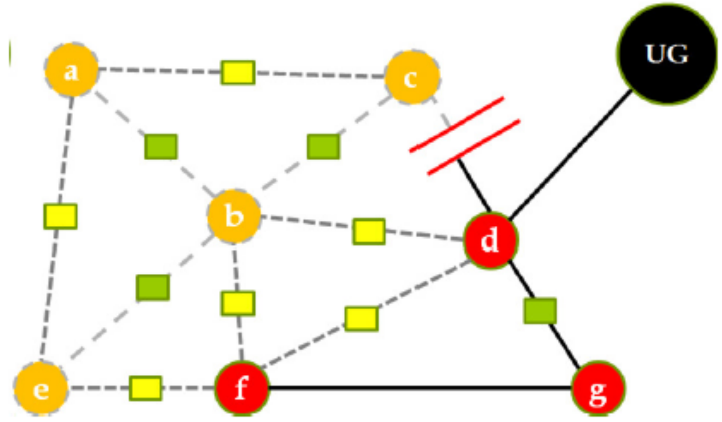
Árvore Geradora Mínima



Árvore Geradora Mínima

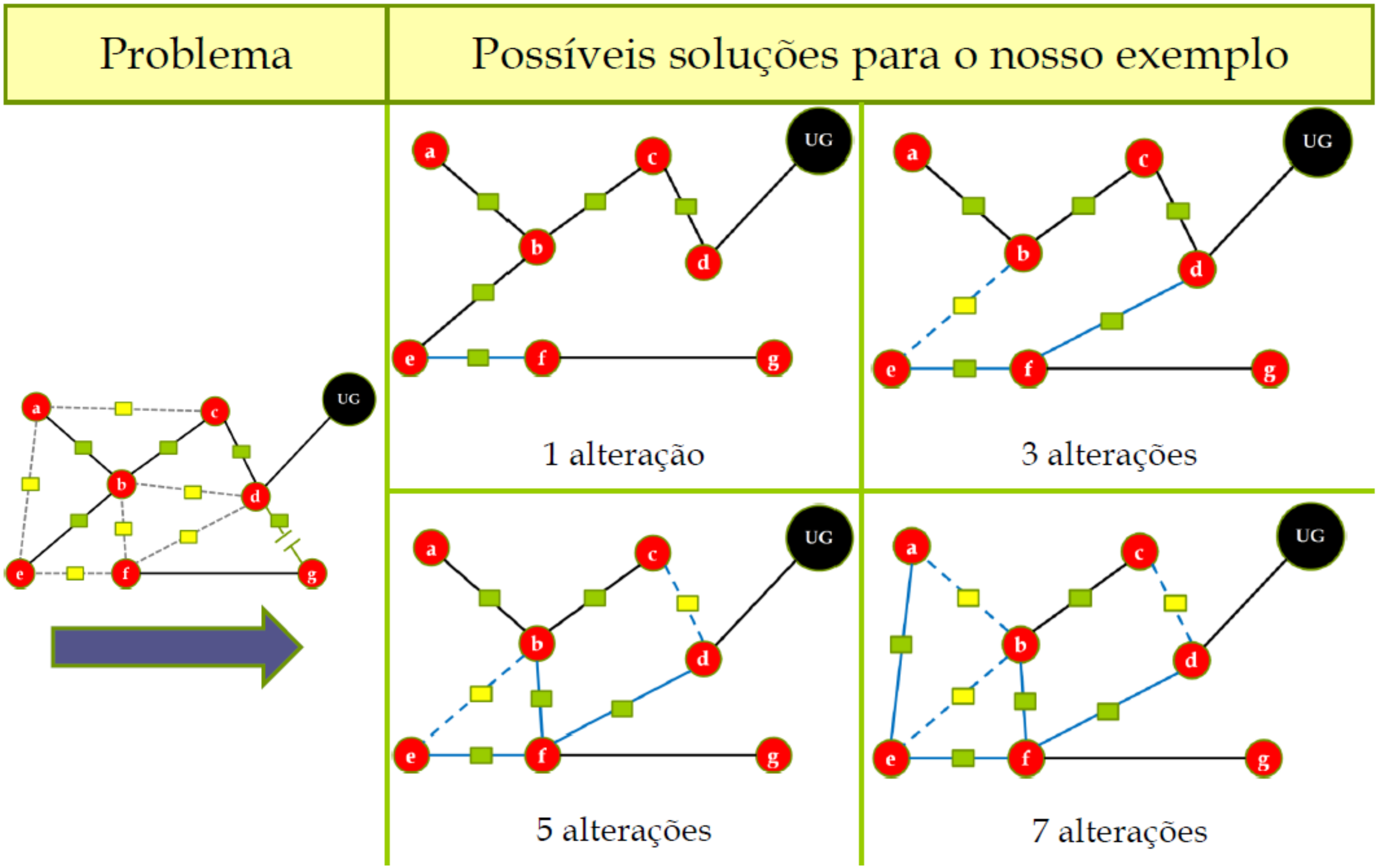
- **Deseja-se 100% de disponibilidade** do SEP;
  - Mas não podemos garantir por falhas como:
    - Catástrofes naturais;
    - Vandalismo;

- A **interrupção** de apenas **uma linha** de transmissão pode causar o **não abastecimento de grande parte dos consumidores**;



Árvore Geradora Mínima

O Problema de Restabelecimento de Sistemas Elétricos de Potência



Árvore Geradora Mínima

- Modelando:
  - Para cada aresta *(u,v)* pertencente a A, temos um **peso *w(u,v)*** especificando o custo para interconectar *(u,v)*. Então, desejamos encontrar um **subconjunto acíclico *X*** contido ou igual a A, que **conecte todos os vértices e cujo peso total seja minimizado**.

$$G = (V, A) \longrightarrow G' = (V, X)$$

$$\min \; w(X) = \sum_{(u,v) \in X} w(u,v)$$

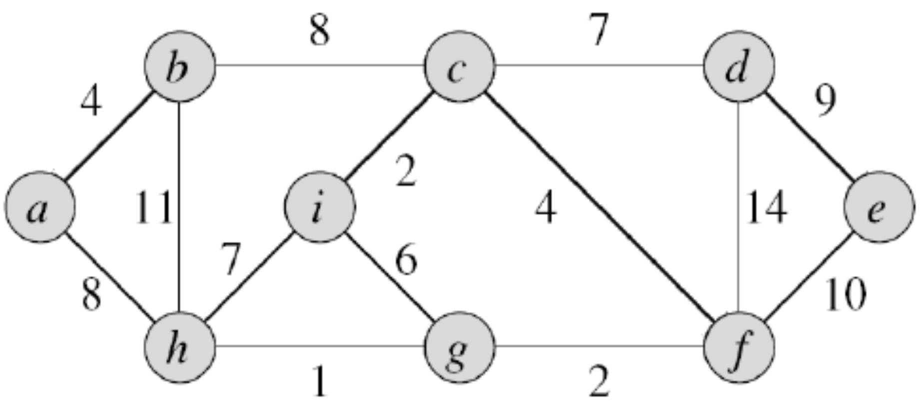
Árvore Geradora Mínima

- Observações:
  - Tendo em vista que *T* é acíclico e conecta todos os vértices, ele deve formar uma árvore, que é chamada de:
    - Árvore geradora, ou
    - Árvore espalhada, ou
    - Árvore de extensão;
  - O problema de determinar a árvore de menor custo é conhecido como:
    - Problema da Árvore Geradora Mínima, ou
    - Problema da Árvore Espalhada Mínima.
    - Problema da Árvore de Extensão Mínima.

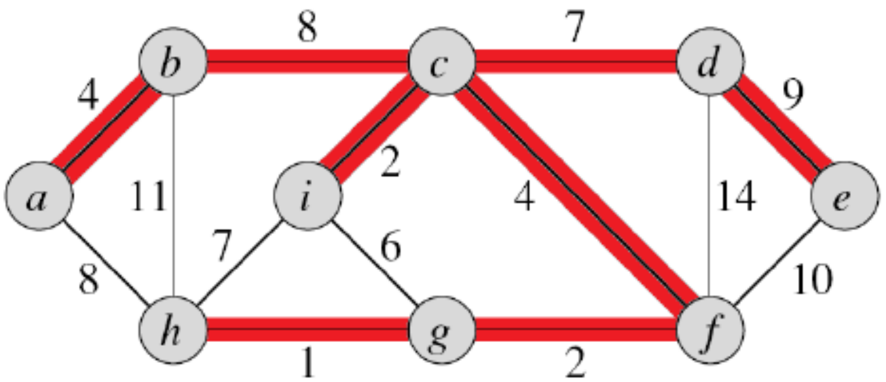
Árvore Geradora Mínima

- Exemplo:

$$G = (V, A)$$



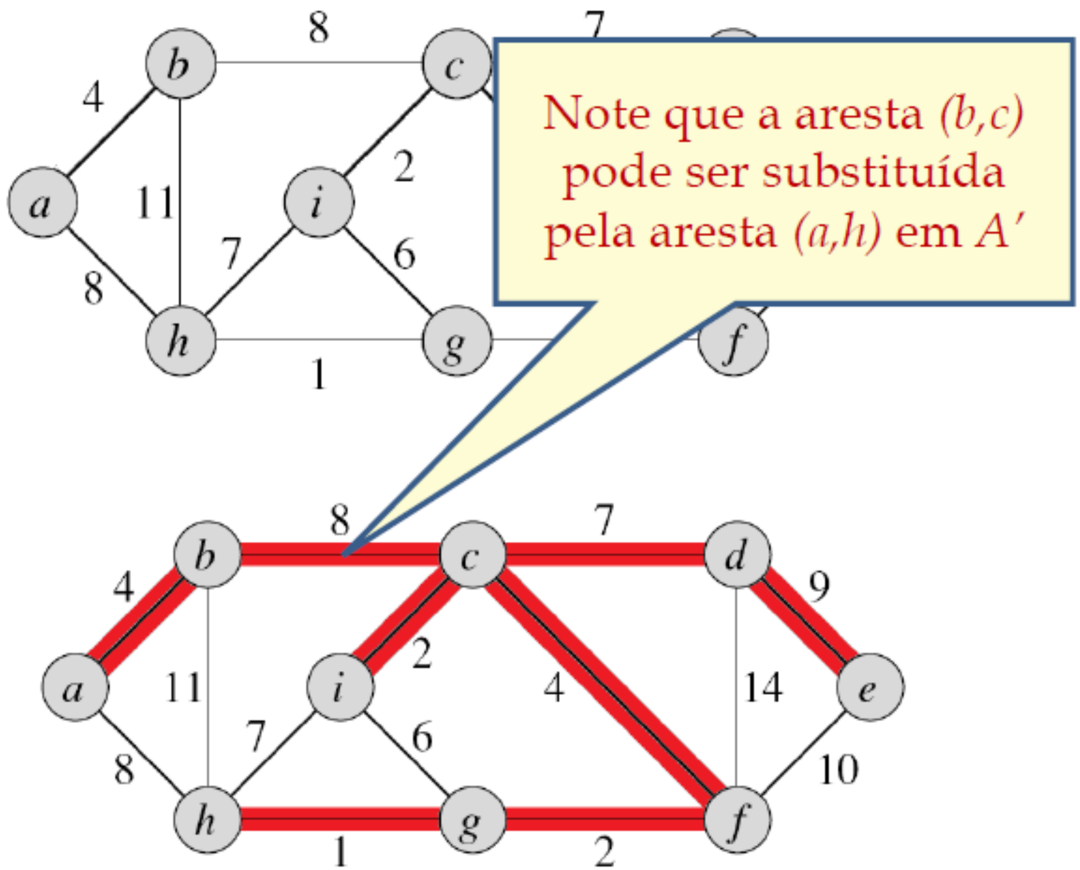
$$G' = (V, X)$$



Árvore Geradora Mínima

- Exemplo:

$$G = (V, A)$$



$$G' = (V, X)$$

Árvore Geradora Mínima

- Existem dois algoritmos clássicos na literatura para resolver o problema da AGM:
  - Algoritmo de Prim;
  - Algoritmo de Kruskal;

- Ambos são considerados algoritmos gulosos.

- A estratégia gulosa defende que a menor escolha a cada passo deve ser feita, mesmo que tal escolha não nos leve a uma solução ótima ao final da execução.
  - MELHOR ESCOLHA IMEDIATA...

Árvore Geradora Mínima

- Grafo não orientado: $G = (V, A)$
- Peso nas arestas: $w : A \rightarrow \Re$
- Antes de cada iteração, X representa o subconjunto de arestas de alguma árvore geradora mínima;
- A cada iteração uma aresta *(u,v)* é adicionada ao conjunto X.
- Problema: Como definir qual aresta do grafo original pode fazer parte de alguma AGM?

$$X \leftarrow X \cup \{(u, v)\}$$

Árvore Geradora Mínima

- Algoritmo Genérico para AGM:

$$
\begin{array}{l}
AGM\_GENERICA(\ G(V,A),\ w\ ) \\
\quad X \leftarrow \{\ \ \} \\
\quad enquanto\ |X| \neq (|V|-1)\ faça \\
\quad\quad encontrar\ uma\ aresta\ (u,v)\ segura\ para\ X \\
\quad\quad X \leftarrow X \cup \{(u,v)\} \\
\quad fim\ enquanto \\
\quad retorna\ X \\
fim.
\end{array}
$$

Árvore Geradora Mínima

- <u>**Algoritmo Genérico para AGM:**</u>

$$
\begin{array}{l}
AGM\_GENERICA(\ G(V,A),\ w\ ) \\
\quad X \leftarrow \{\ \ \} \\
\quad enquanto\ |X| \neq (|V|-1)\ faça \\
\qquad encontrar\ uma\ aresta\ (u,v)\ segura\ para\ X \\
\qquad X \leftarrow X \cup \{(u,v)\} \\
\quad fim\ enquanto \\
\quad retorna\ X \\
fim.
\end{array}
$$

É obvio que o ponto chave é a localização da aresta que pode fazer parte de alguma AGM.

Árvore Geradora Mínima

- Antes de fornecermos uma forma de identificar uma aresta segura para a AGM, precisamos de um conceito na área de grafos: corte

- Corte é uma partição é uma partição do conjunto de vértices

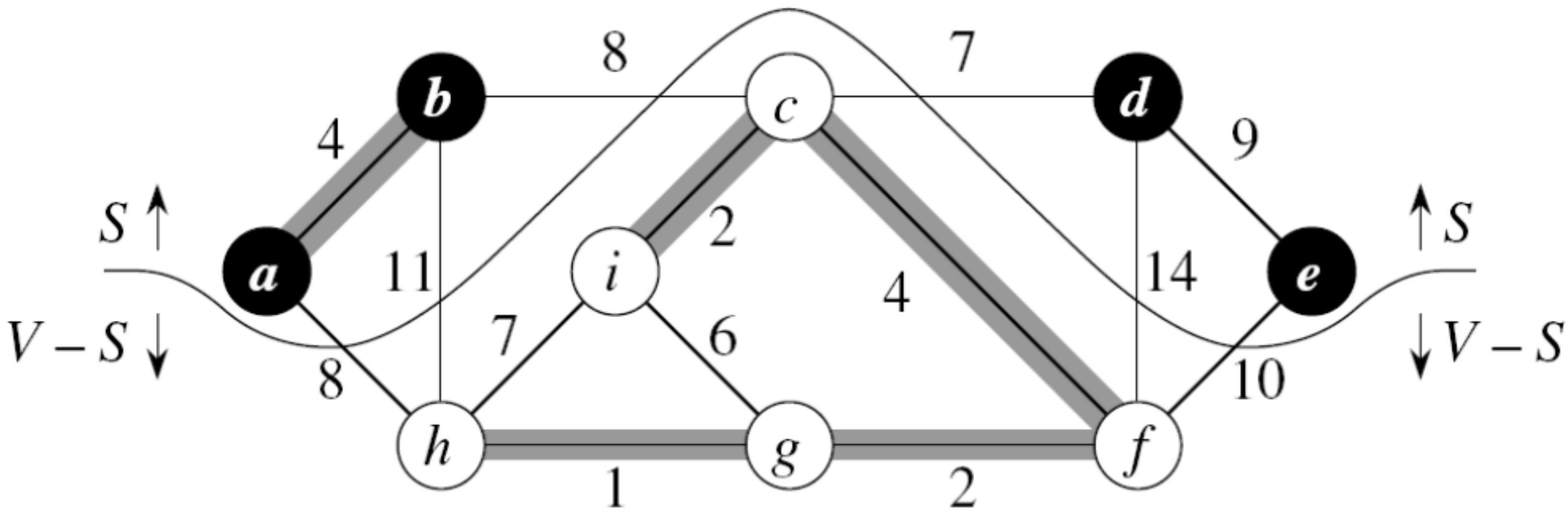
- Corte:

$$G = (V, A)$$

$$(S, V - S)$$

Árvore Geradora Mínima

- Primeira maneira de visualizar um corte:



$$S = \{a, b, d, e\}$$

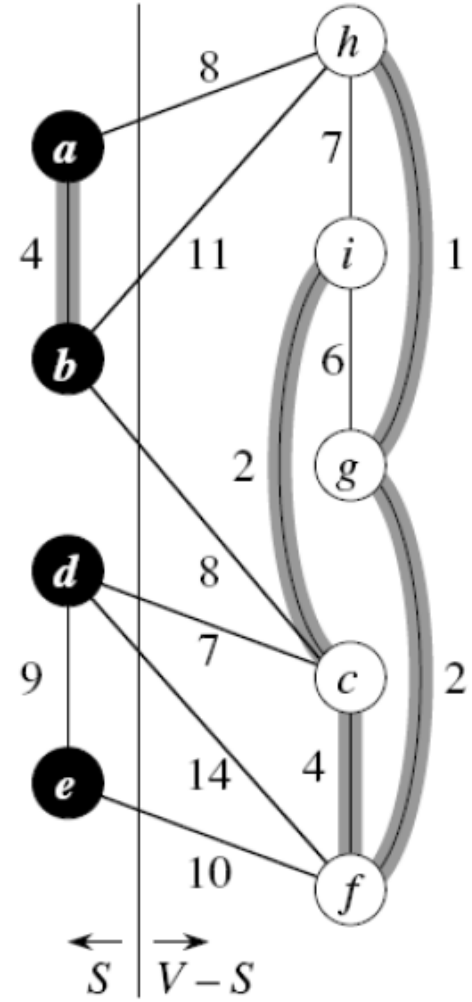
$$V - S = \{h, i, c, g, f\}$$

Árvore Geradora Mínima

- Segunda maneira de visualizar o mesmo corte:

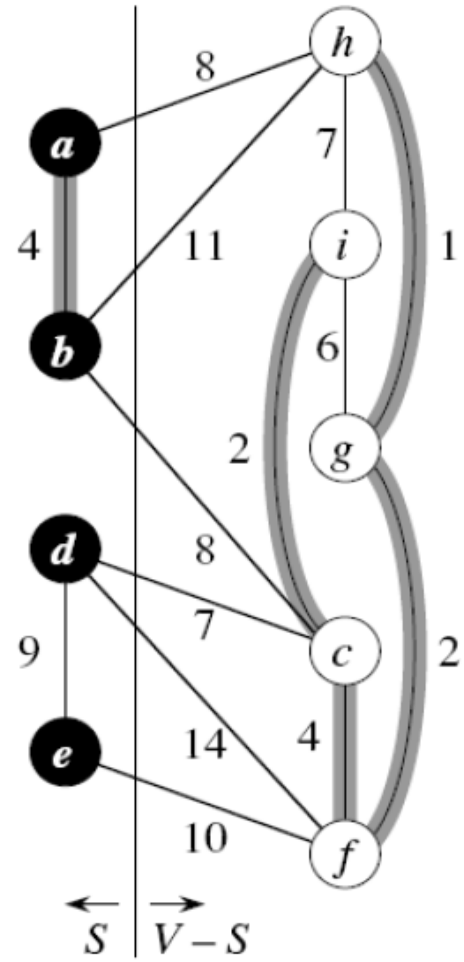
$$S = \{a, b, d, e\}$$

$$V - S = \{h, i, c, g, f\}$$



Árvore Geradora Mínima

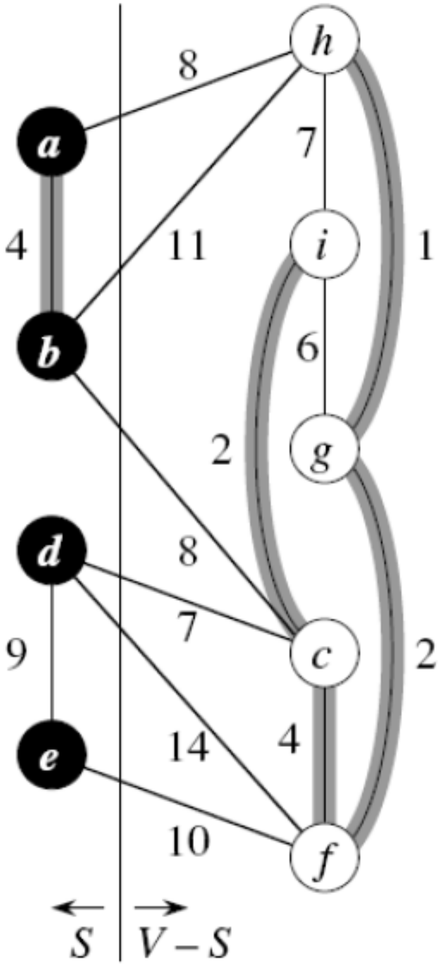
- <u>Definição 2:</u>
  - CORTE RESPEITA X
  - Dizemos que um corte respeita o conjunto X se nenhuma aresta de X cruza o corte.



ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

- Definição 3:
  - ARESTA LEVE

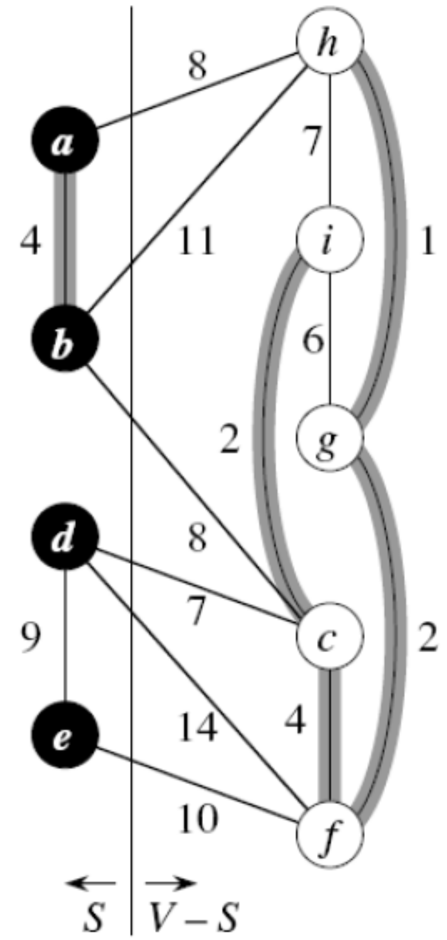
  - Dizemos que uma aresta é uma aresta leve cruzando o corte se o seu peso é o menor, se comparado as outras arestas que cruzam o corte.



Árvore Geradora Mínima

- Arestas seguras:

  - **Teorema:** Seja *(S, V-S)* qualquer corte de *G* que respeita *X* e seja *(u,v)* uma aresta leve cruzando *(S,V-S)*, então a aresta *(u,v)* é segura para *X*.



Árvore Geradora Mínima

- Voltando ao algoritmo:

$AGM\_GENERICA(\ G(V,A),\ w\ )$

$\quad X \leftarrow \{\ \ \}$

$\quad enquanto\ |X| \leq |V| - 1\ faça$

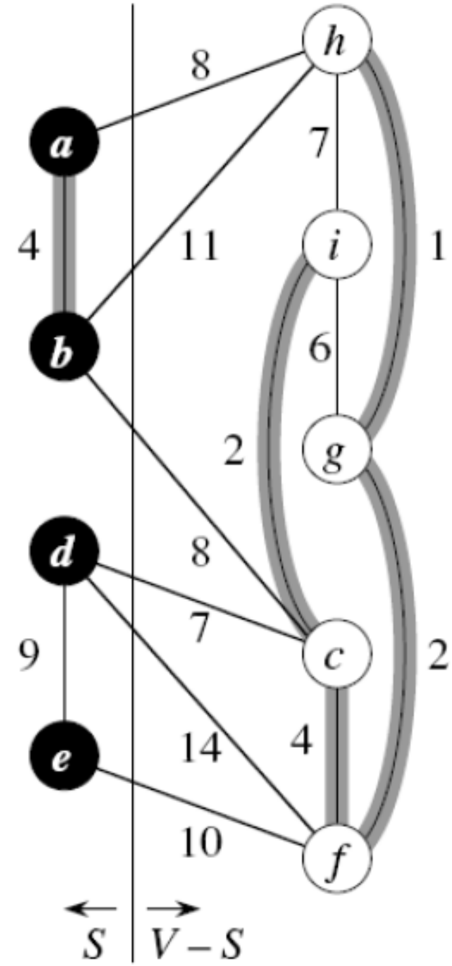
$\quad\quad encontrar\ uma\ aresta\ (u,v)\ segura\ para\ X$

$\quad\quad X \leftarrow X \cup \{(u,v)\}$

$\quad fim\ enquanto$

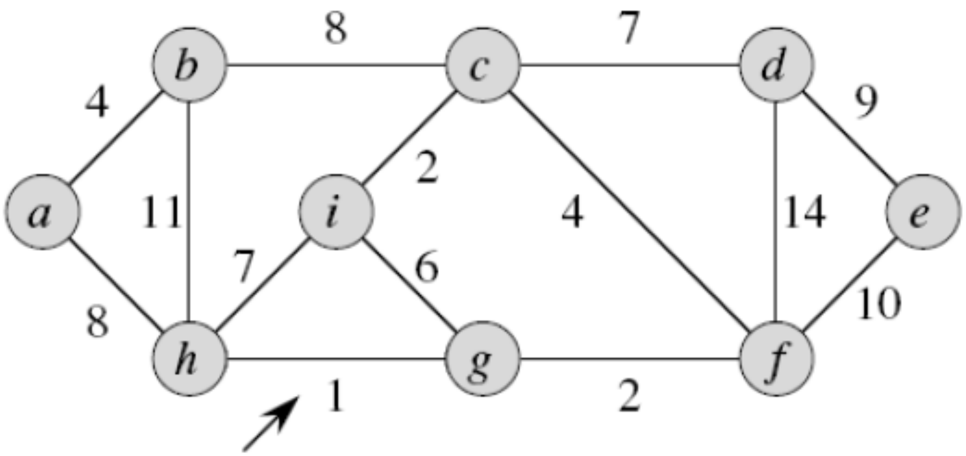
$\quad retorna\ X$

$fim.$

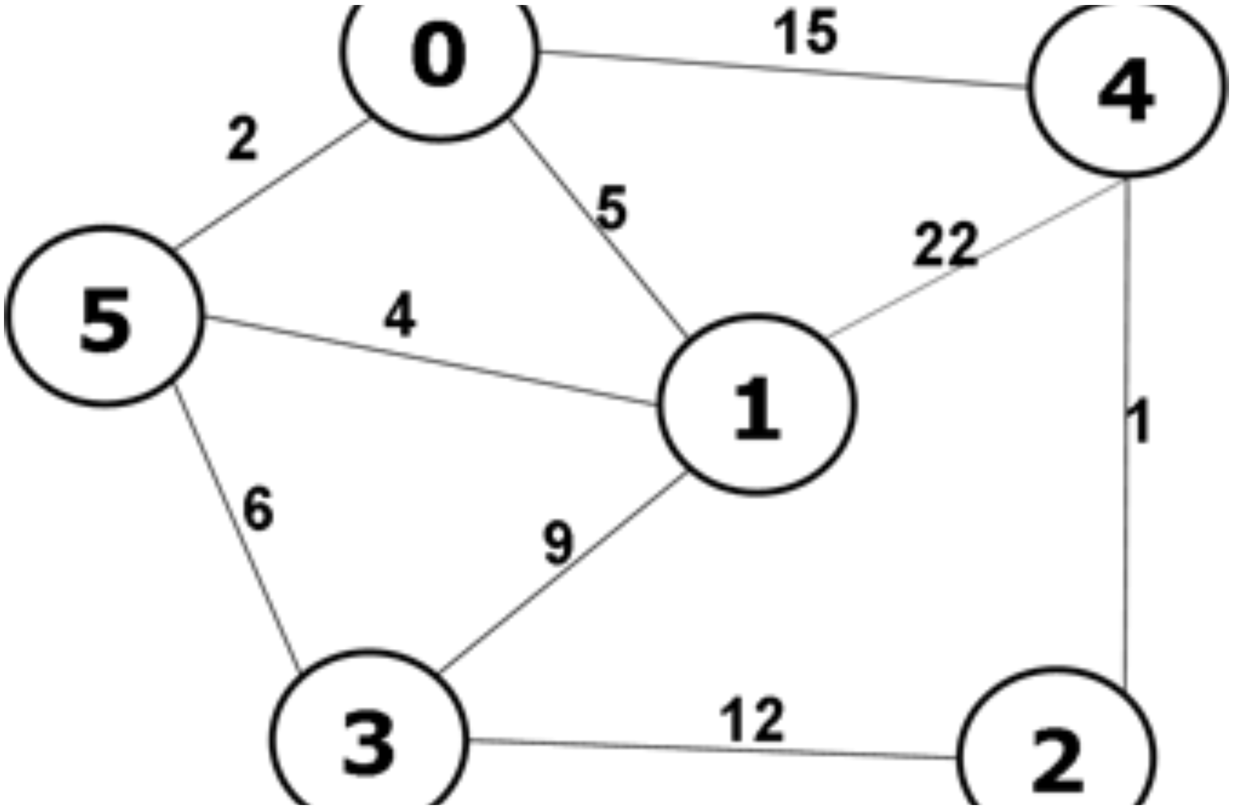


Árvore Geradora Mínima

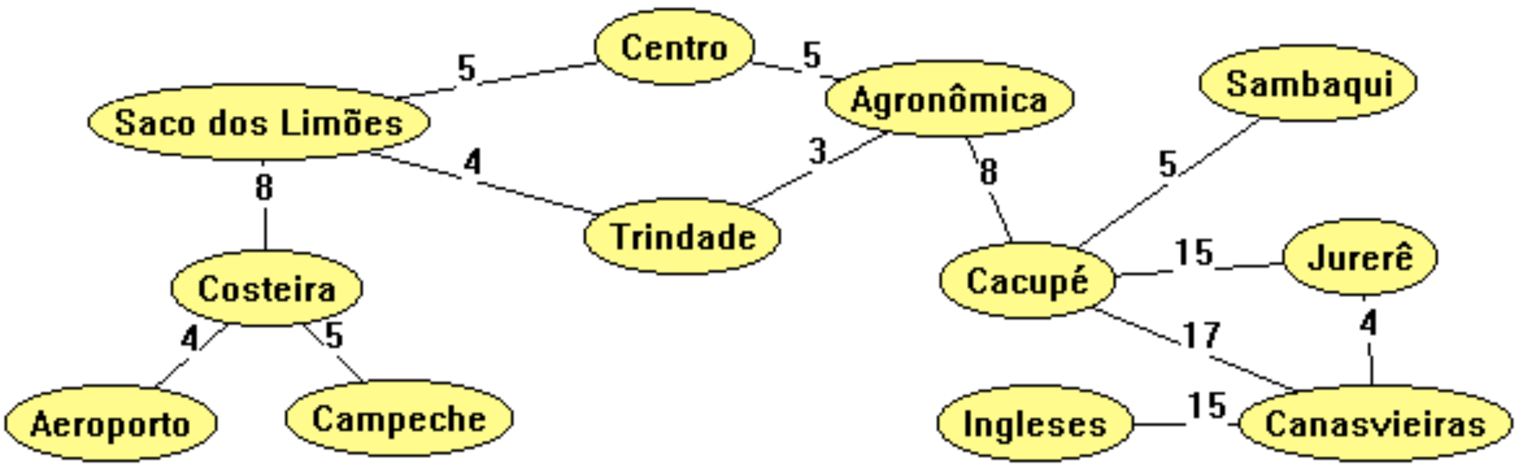
- Questão 1:
  - Seja *(u,v)* uma aresta de peso mínimo em um grafo *G*:
    - Ela pode <u>não</u> pertencer a AGM?



Árvore Geradora Mínima



Árvore Geradora Mínima



Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002). Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana. Rio de Janeiro. Editora Campus.

- ZIVIANI, N. (2007). Projeto e Algoritmos com implementações em Java e C++. São Paulo. Editora Thomson;