

História dos Grafos

Adaptado de Humberto C. B. Oliveira

Leonhard Euler

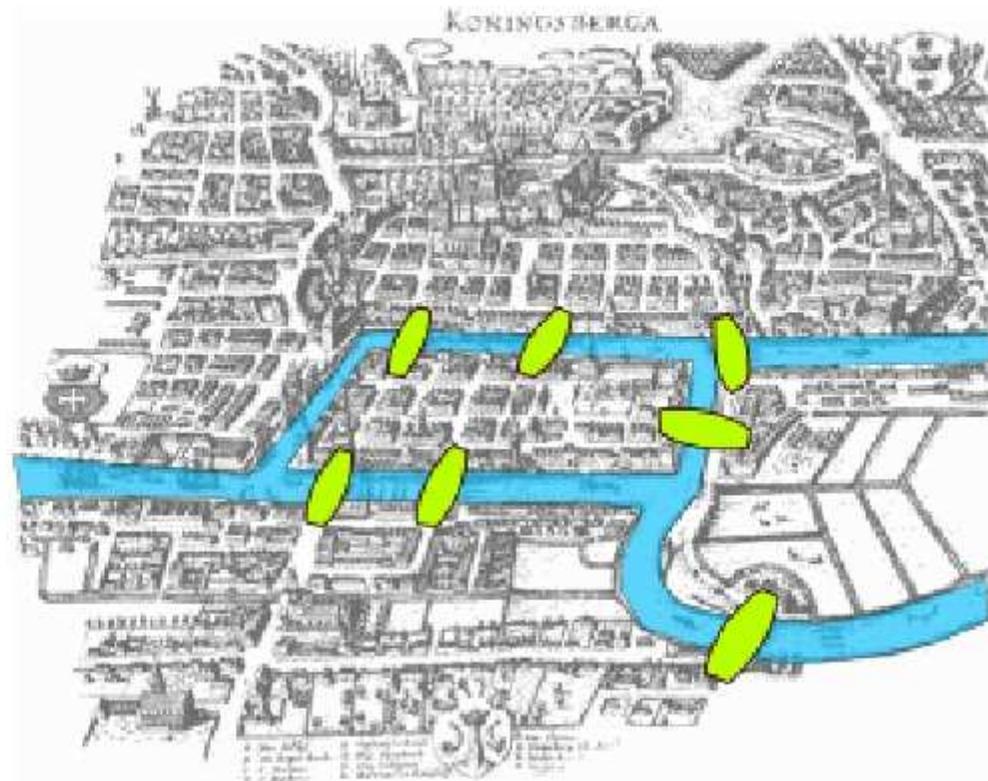
- Em **1735**, Euler ganha fama mundial ao resolver um problema que por décadas foi desafio para os matemáticos da época (Série infinita da **soma dos inversos dos quadrados** – conhecido como problema da Basileia);
- **A maioria dos grandes matemáticos** de seu tempo **tentaram** sem êxito encontrar o resultado desta série infinita;
- **Euler possuía apenas 28 anos** na época;



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

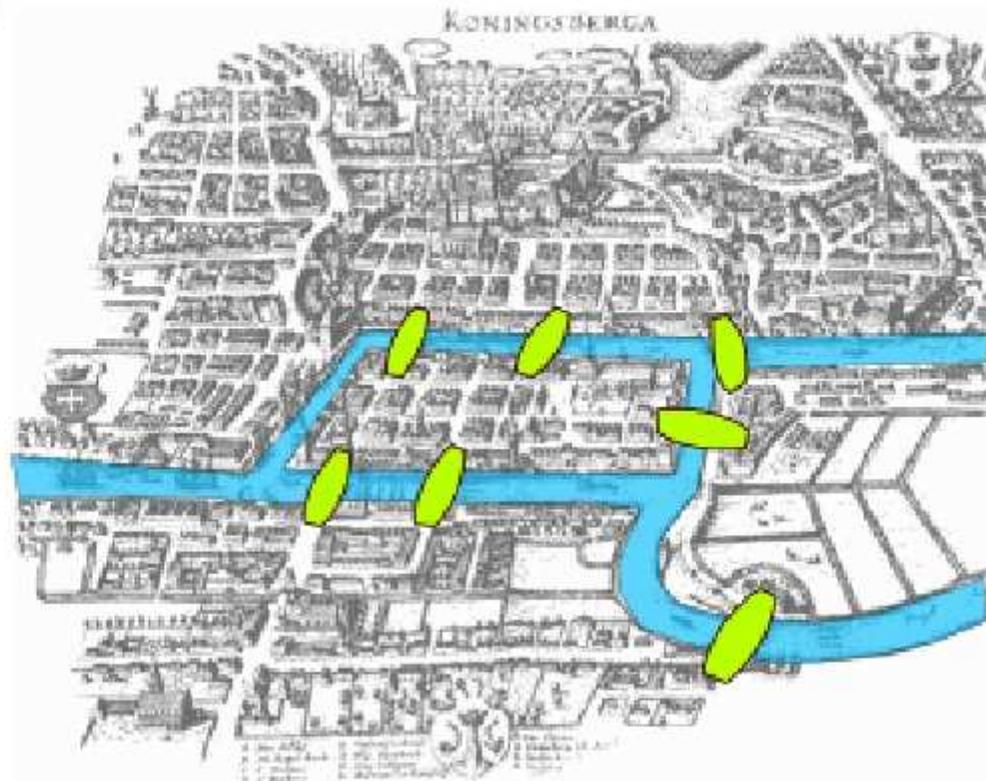
Leonhard Euler

- Um ano mais tarde (1736), Euler resolve o problema conhecido como as Sete pontes de Königsberg.
- Problema:
 - É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e volte a mesma posição passando por todas as pontes somente uma única vez?

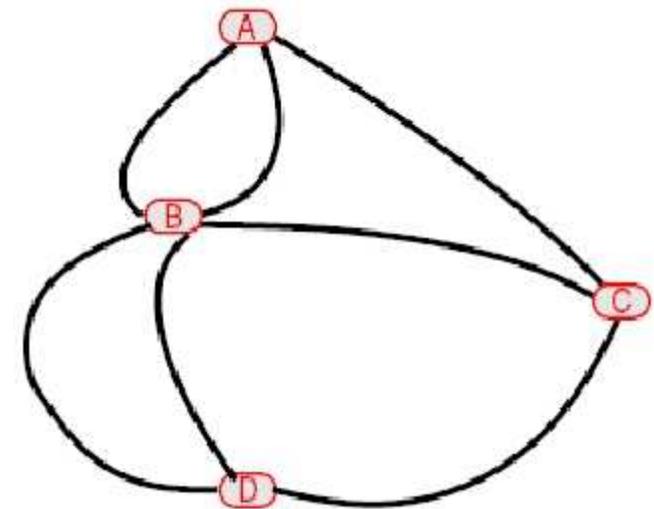
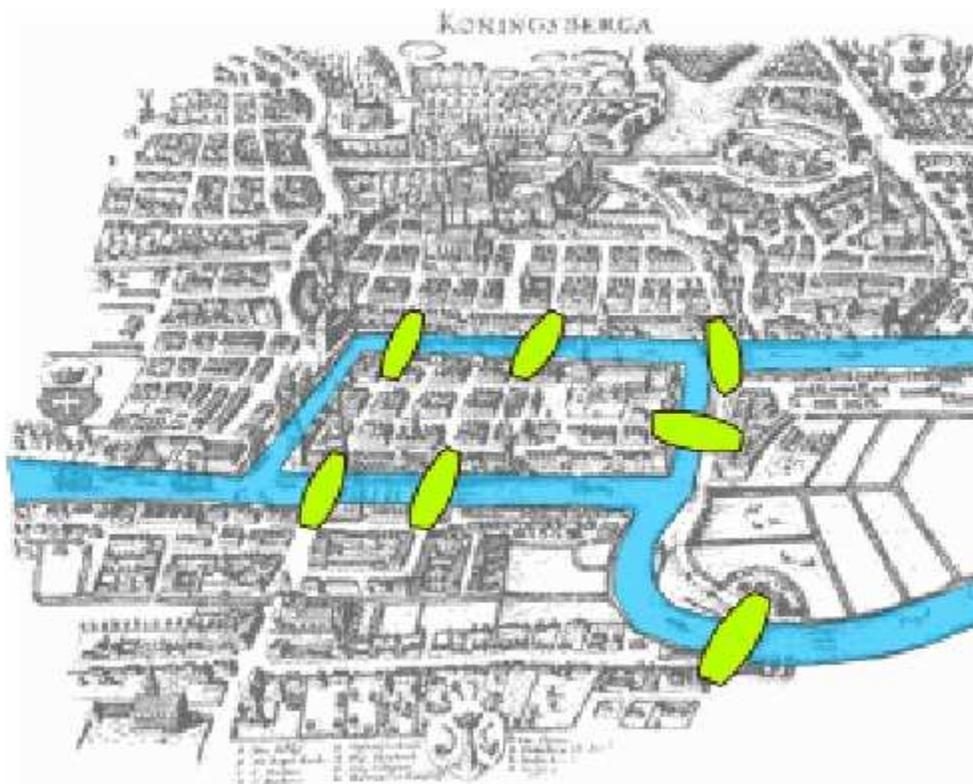


As Sete Pontes de Königsberg

- Euler resolve este problema simplificando a forma de se enxergar o mapa:
- Cada faixa de terra representa um ponto, e as pontes são ligações entre os pontos.

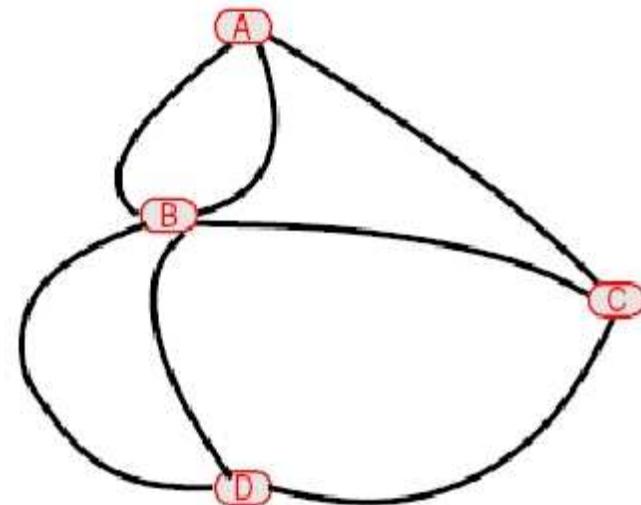


As Sete Pontes de Königsberg



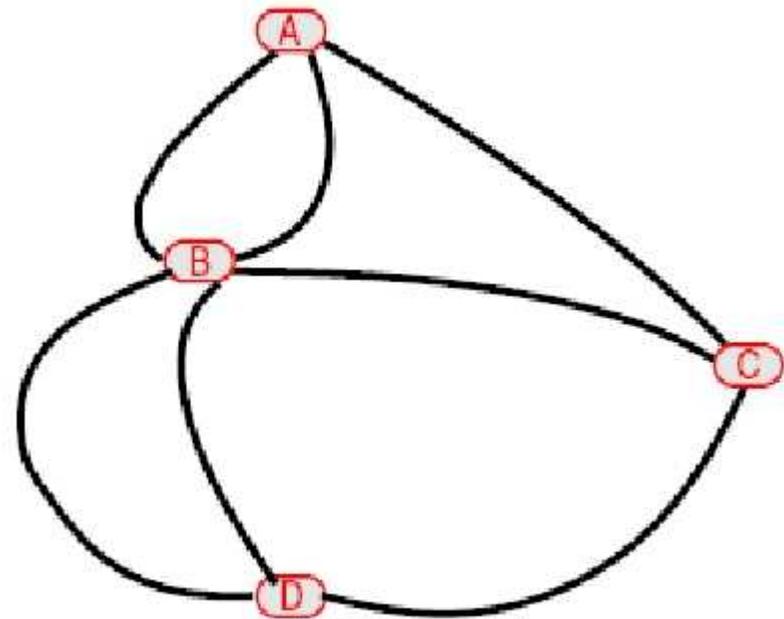
As Sete Pontes de Königsberg

- Obviamente, existem **duas respostas possíveis** para o dilema:
 - **Ou Existe solução...**
 - Basta mostrar uma!!! Fácil... 😊
 - Será mesmo simples??? Para todo problema...
 - **Ou não existe solução.**
 - Pode se mostrar enumerando todos os caminhos possíveis, e mostrar que todos falham;
 - Árvore de possibilidades;
 - ou de forma mais elegante, provando através das características do grafo que não existe solução para o problema.



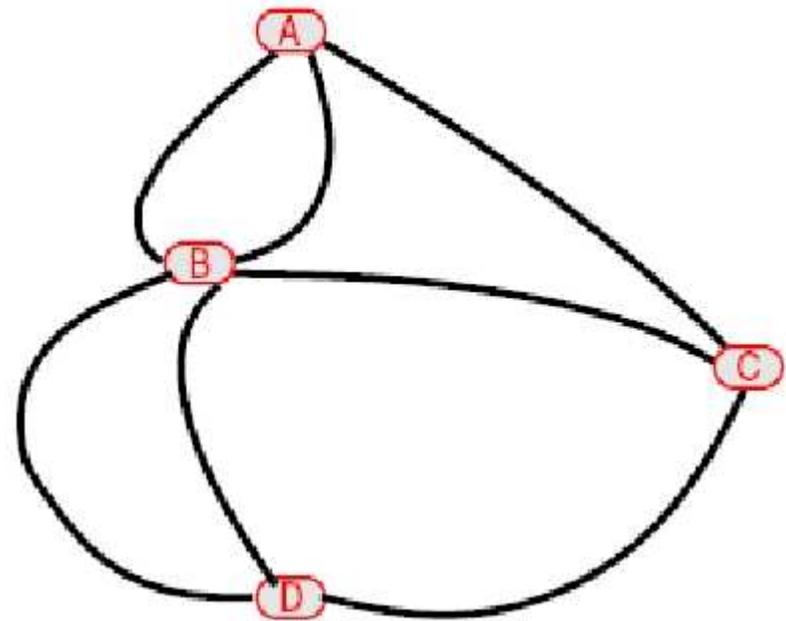
As Sete Pontes de Königsberg

- Aparentemente não existe solução;
- Partindo do vértice A, e percorrendo outros vértices, podemos ver a utilização de no mínimo duas arestas (pontes) “chegada” e a de “saída”.
- Assim, se for possível achar uma rota que usa todas as arestas do grafo e começa e termina em A, então o número total de “chegadas” e “saídas” de cada vértice deve ser um valor múltiplo de 2.



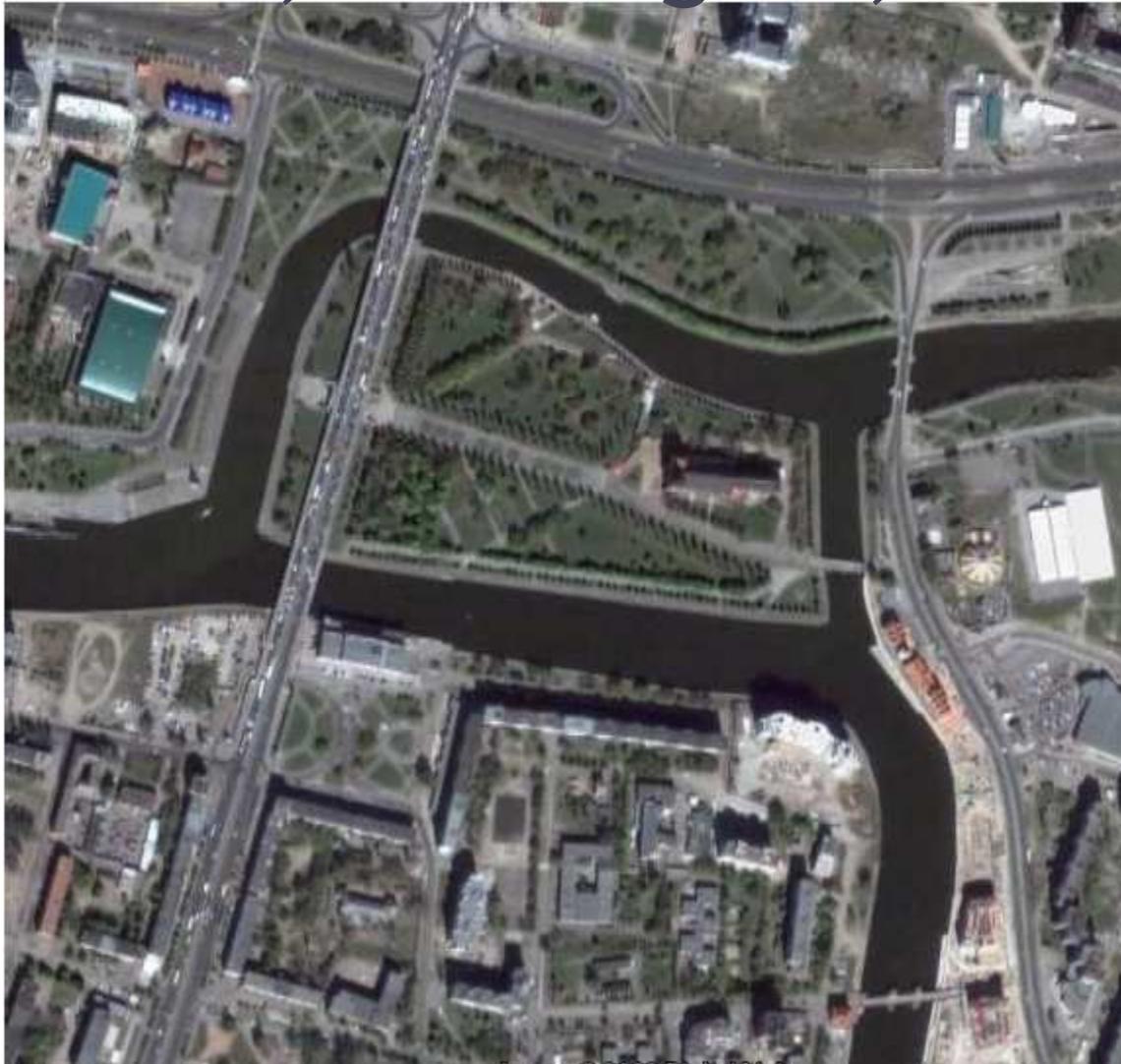
As Sete Pontes de Königsberg

- No entanto, temos:
 - $\text{grau}(A) = \text{grau}(C) = \text{grau}(D) = 3$;
 - $\text{grau}(B) = 5$.
- Assim, por este raciocínio não é possível percorrer as faixas de terra, passando por cada ponte uma única vez, retornando ao vértice de partida.



1736, Königsberg, Prússia

2007, Kaliningrad, Rússia



- Foto de 29/04/2007.
- A configuração das pontes está diferente.
- Mas agora existe caminho que satisfaz ao problema proposto no passado?

As Sete Pontes de Königsberg

- Verifique a beleza da solução de Euler...
- Mesmo para diferentes problemas, rapidamente verificamos que não existe tal ciclo...
 - Tal verificação pode ser efetuada em tempo polinomial, sem a necessidade de enumerar (implícita ou explicitamente todas as possibilidades)
- Quando existe tal ciclo, ele é classificado como ciclo Euleriano...



Leonhard Euler

curiosidades...

- Euler é atualmente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos;
- Produziu mais de **1100 artigos e livros**;
- Durante os últimos 17 anos de vida, ele ficou praticamente cego, quando produziu quase que metade de seus trabalhos.



Um pouco de história...

- Apesar da beleza da solução de Euler para o problema das sete pontes, a solução foi um detalhe na imensidão de contribuições do matemático;
- A resolução de um *toy problem*, e não aparentava a princípio ser de grande relevância para a ciência;
- Seu método de abstração ficou durante 150 anos oculto em meio ao seu mar de livros e artigos.

Um pouco de história...

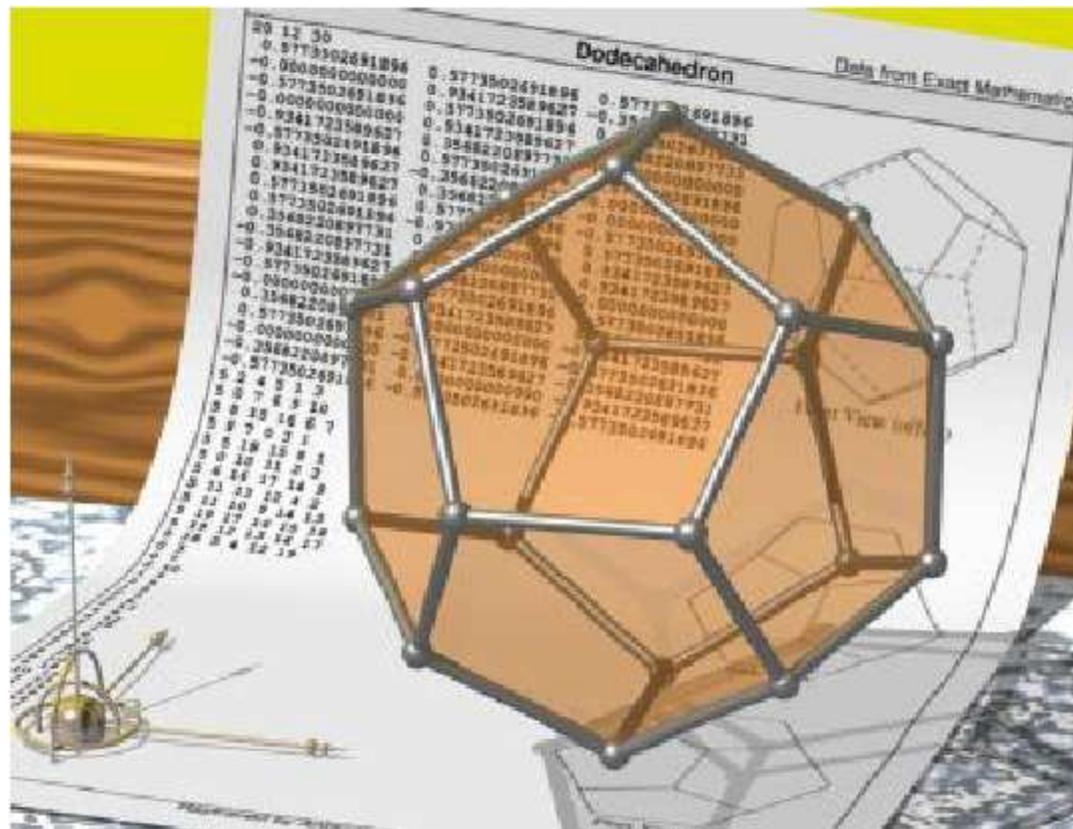
- Por causa disso, a Teoria dos Grafos foi redescoberta diversas vezes durante a história, ou seja, inúmeros pesquisadores chegaram ao mesmo modelo de abstração de Euler;
- É interessante observar que o período transcorrido, entre a demonstração de Euler e a última década do século XIX, poucos trabalhos foram propostos com tal abstração (em 150 anos!!!);

Um pouco de história...

- **1847** – **Kirchhoff** utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, criando a teoria das árvores;
- **1857** – **Cayley** seguiu a mesma linha de Kirchhoff, mas de forma independente, aplicando a teoria em química orgânica (isômeros dos hidrocarbonetos);
- **1869** – **Jordan** estudou as árvores, de um ponto de vista matemático;

Um pouco de história...

- 1859 – Hamilton propôs um *toy problem*, a princípio sem aplicação prática. A busca por um circuito fechado em um dodecaedro regular;



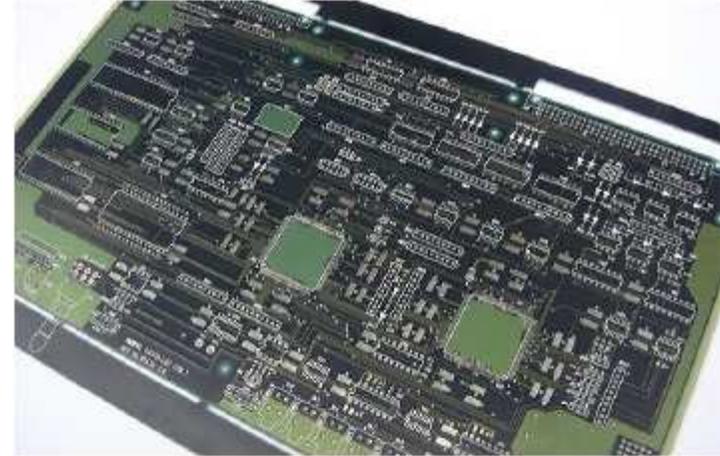
Um pouco de história...

- Diferentemente do **problema de Euler (que não se repete aresta, e pode se repetir vértices)**, o problema de Hamilton não permite a repetição de vértices, e conseqüentemente também não se repetem arestas;
- Atualmente, o ciclo Hamiltoniano é utilizado na definição formal do problema do Caixeiro Viajante (*um dos mais importantes e complexos problemas já descritos – definitivamente, o mais estudado problema de otimização combinatória*);
- É interessante observar que **os problemas de Euler e Hamilton encontraram aplicações práticas 100 anos mais tarde**, na área de Pesquisa Operacional;

Um pouco de história...

Aplicação do ciclo Hamiltoniano

- Imagine que você precisa construir uma **placa de circuito impresso**.
- Esta possui inúmeros furos para o encaixe de seus componentes.
- Suponha que você possui a disposição um **braço eletrônico** para perfurar a placa e precisa descrever um **algoritmo para encontrar a ordem perfuração dos buracos**;



Um pouco de história...

- 1879 – Kempe procurou demonstrar a “Conjectura das 4 cores”. Trata-se de provar que todo mapa desenhado sobre uma superfície 2D e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor;
 - Mais tarde (1890) o matemático Heawood mostrou que a “prova” de Kempe estava errada;

Um pouco de história...

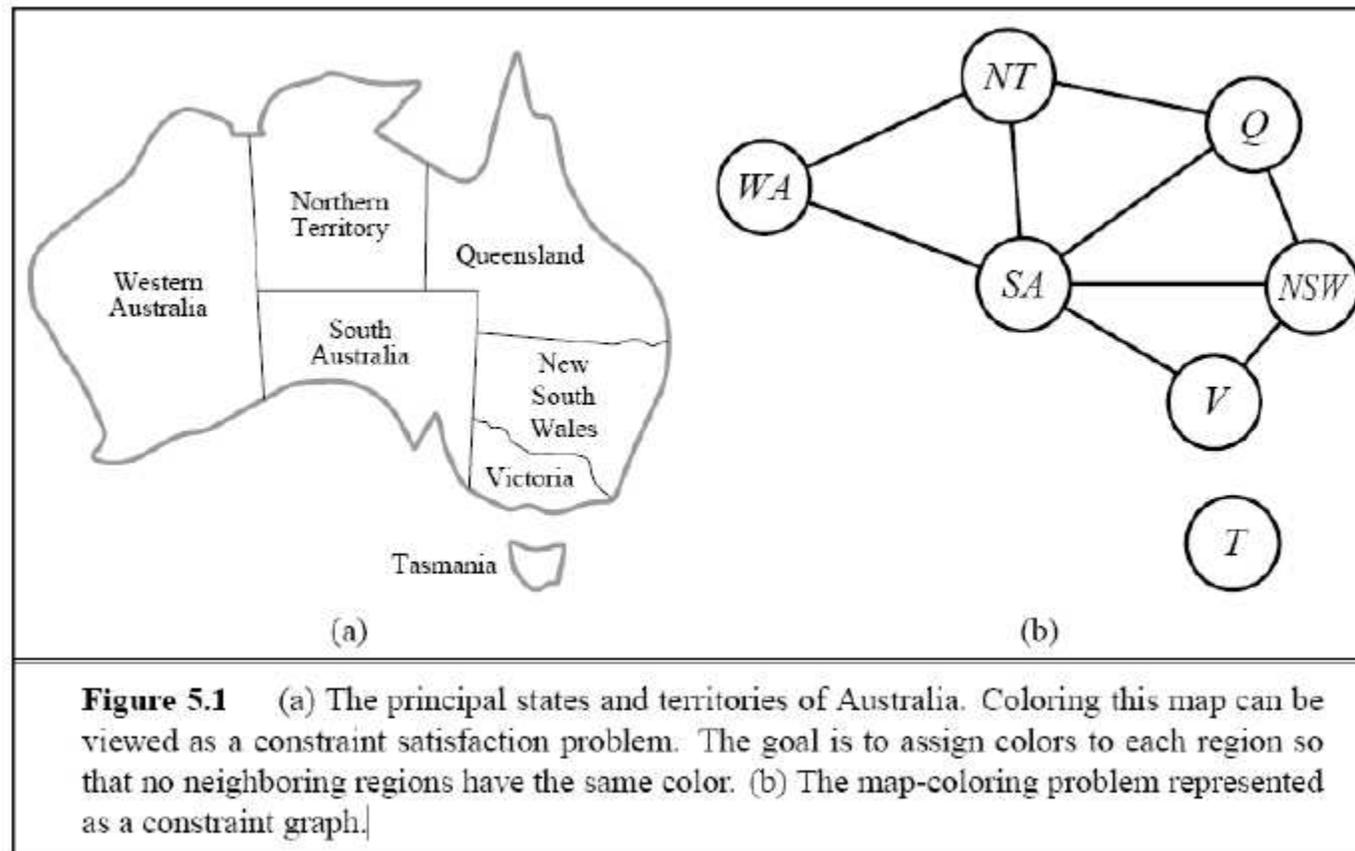


Figura do livro

Artificial Intelligence – A modern approach
(AIMA)

Um pouco de história...

- 1880 – Tait divulgou também uma “prova” da coloração de mapas utilizando apenas 4 cores;
 - Infelizmente ela foi baseada em uma conjectura falsa;
- 1890 – Heawood mostrou que a “prova” de Kempe estava errada;
- 1890 – Heawood consegue uma prova utilizando 5 cores para coloração de qualquer mapa 2D;

Um pouco de história...

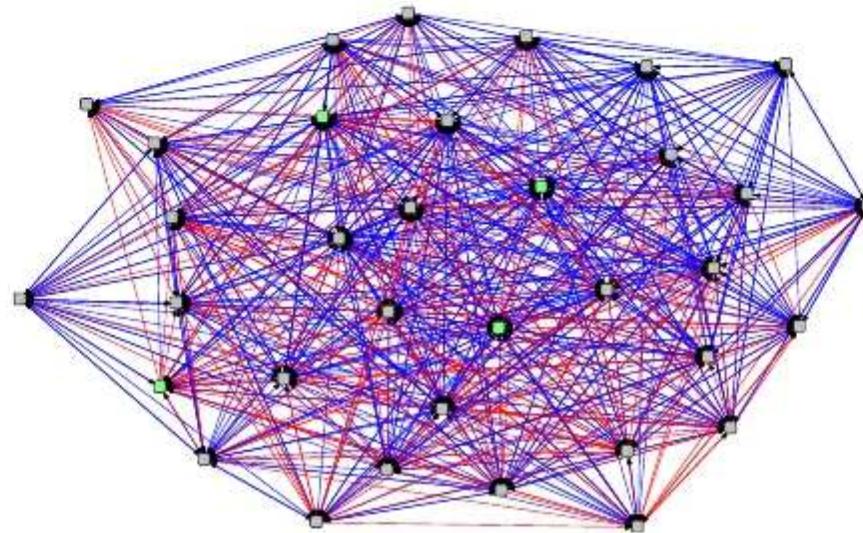
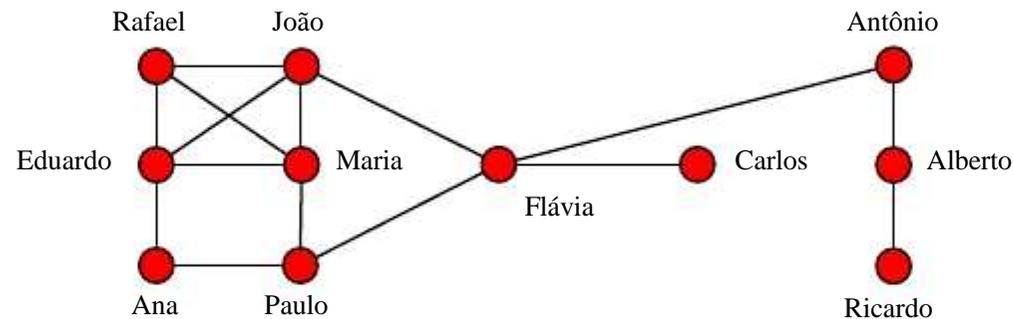
- Mais tarde, uma prova foi divulgada mostrando que com 4 cores é possível colorir qualquer mapa com no máximo 25 regiões.
- Na prática, a busca por esta prova não teve impacto muito relevante;
- **A vantagem foi o grande desenvolvimento na teoria dos grafos neste período**, durante as inúmeras tentativas dos matemáticos sobre o problema;

Exemplos de Aplicações



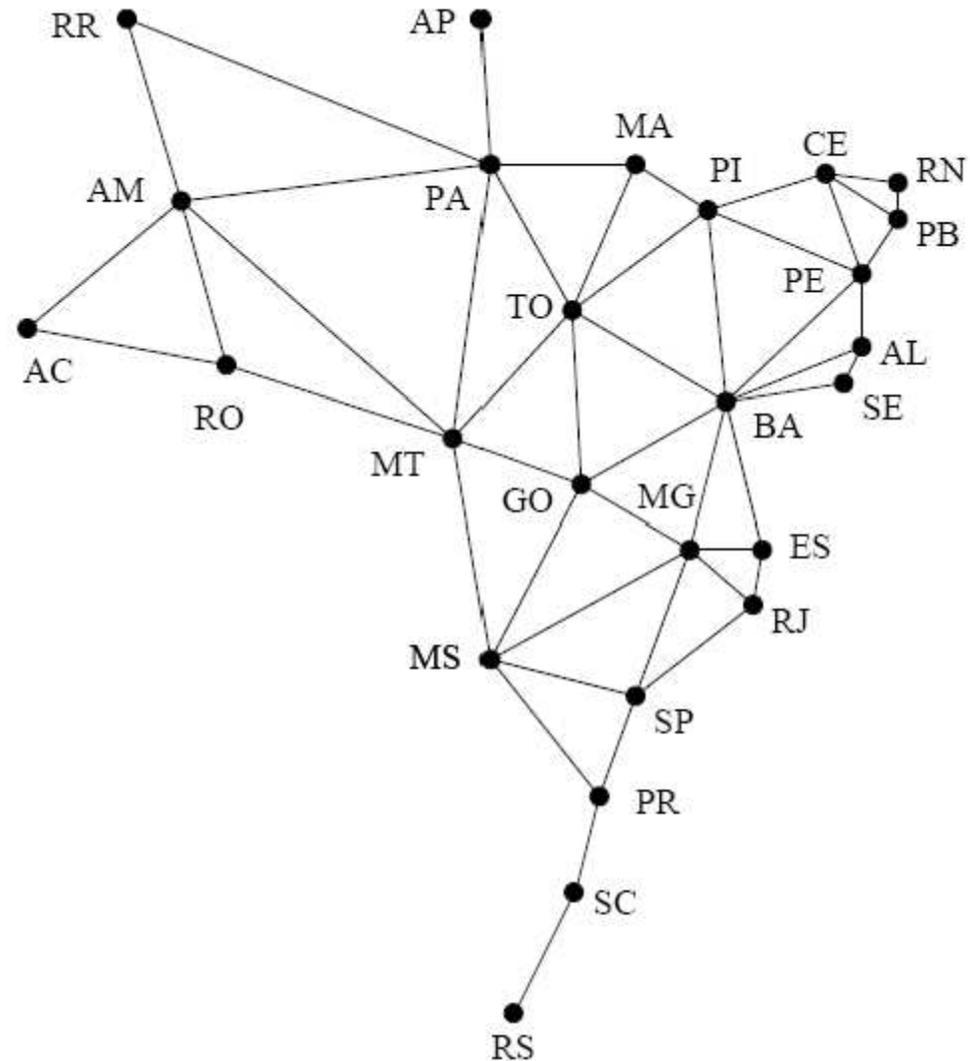
Exemplo de Aplicação: Sociograma

- Os sociogramas representam relacionamentos entre indivíduos;

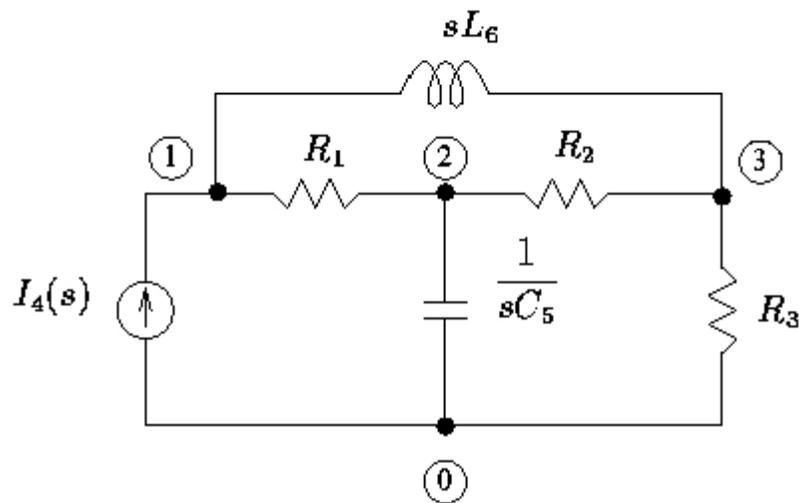


Exemplo de aplicação: Representação de Localidades

- A representação é base para inúmeras aplicações em grafos...

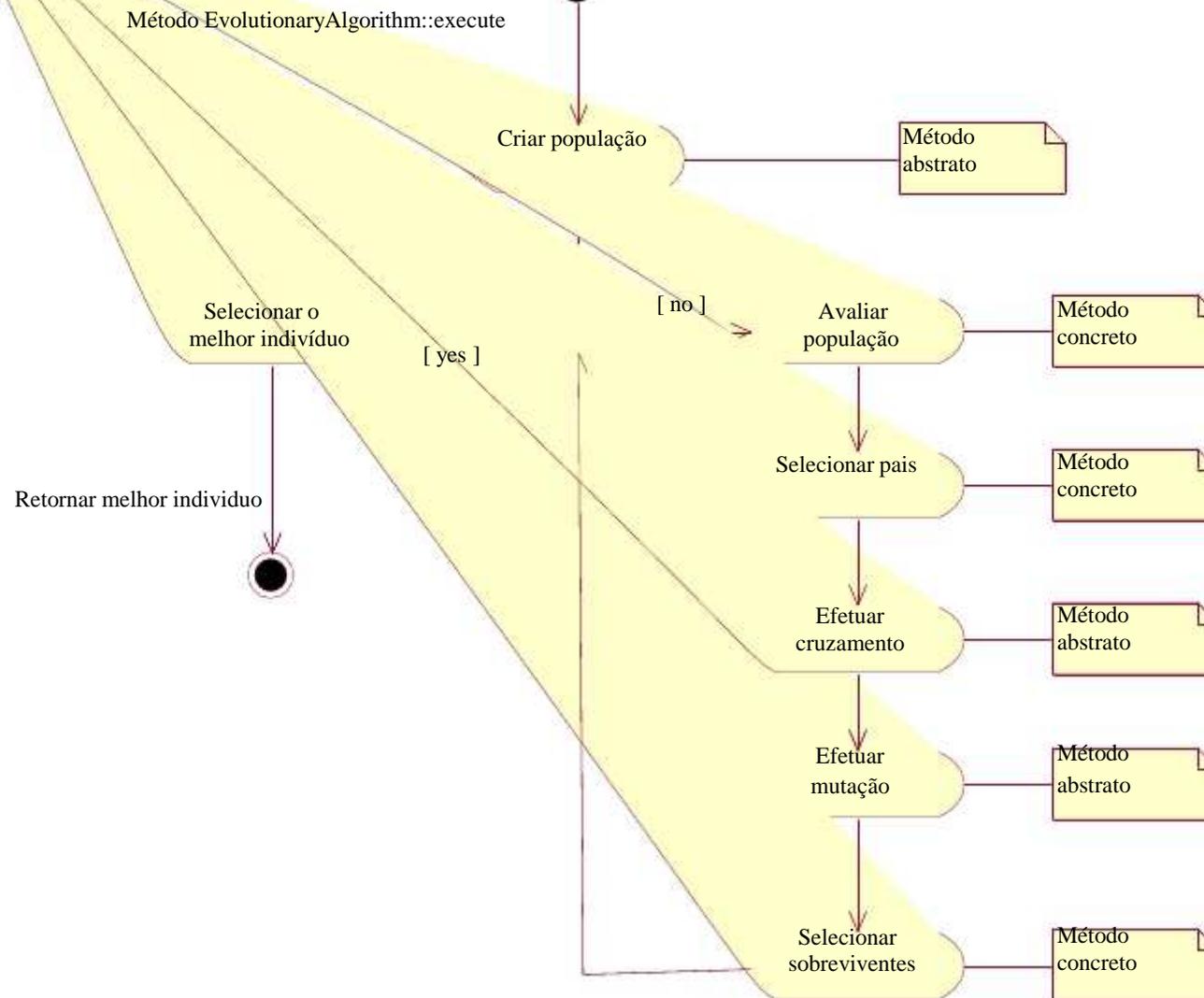


Exemplo de aplicação: Circuitos elétricos



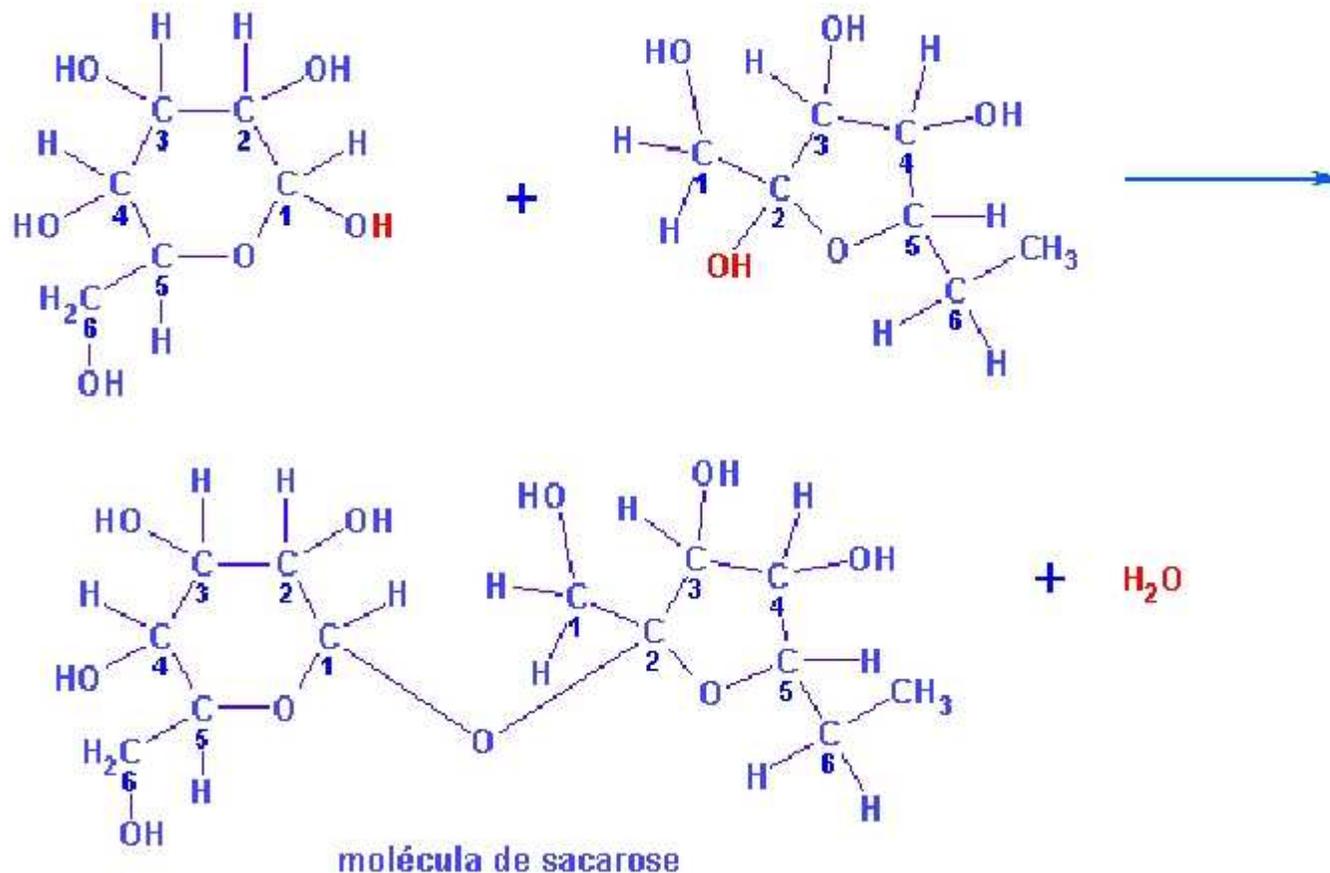
- Atualmente existem muitos problemas em aberto **dedicados a prevenção de falhas** no sistema elétrico de grandes metrópoles.

Exemplo de aplicação: Diagrama de Estados



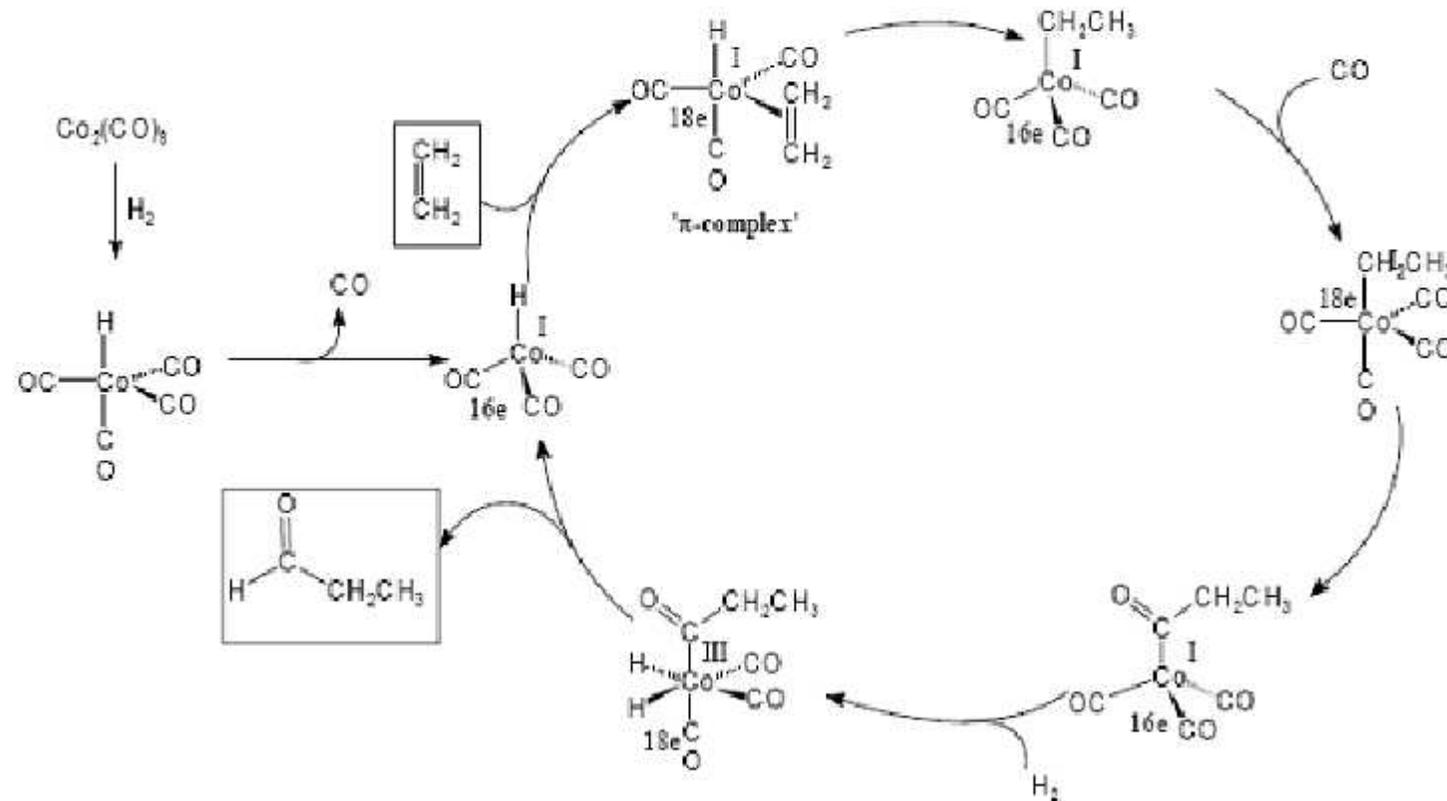
Exemplo de aplicação: Química molecular

- Representação bidimensional de moléculas utilizando grafos...



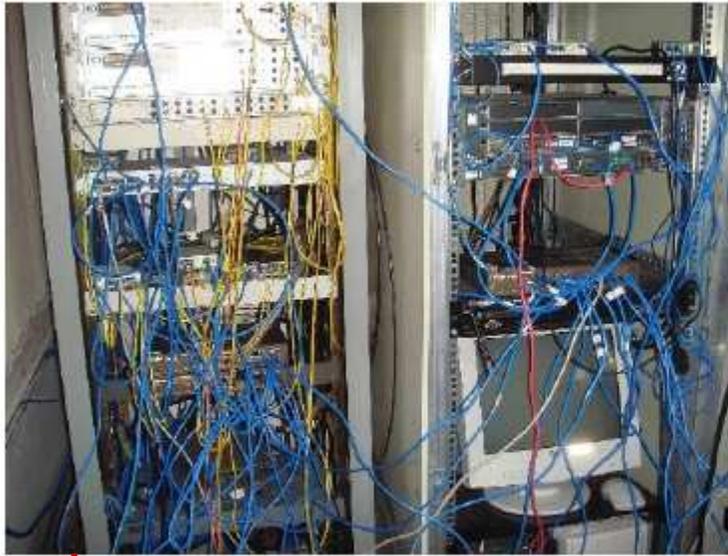
Exemplo de aplicação: Química - Ciclos catalíticos

- Ciclos catalíticos...



Exemplo de aplicação: Redes de computadores

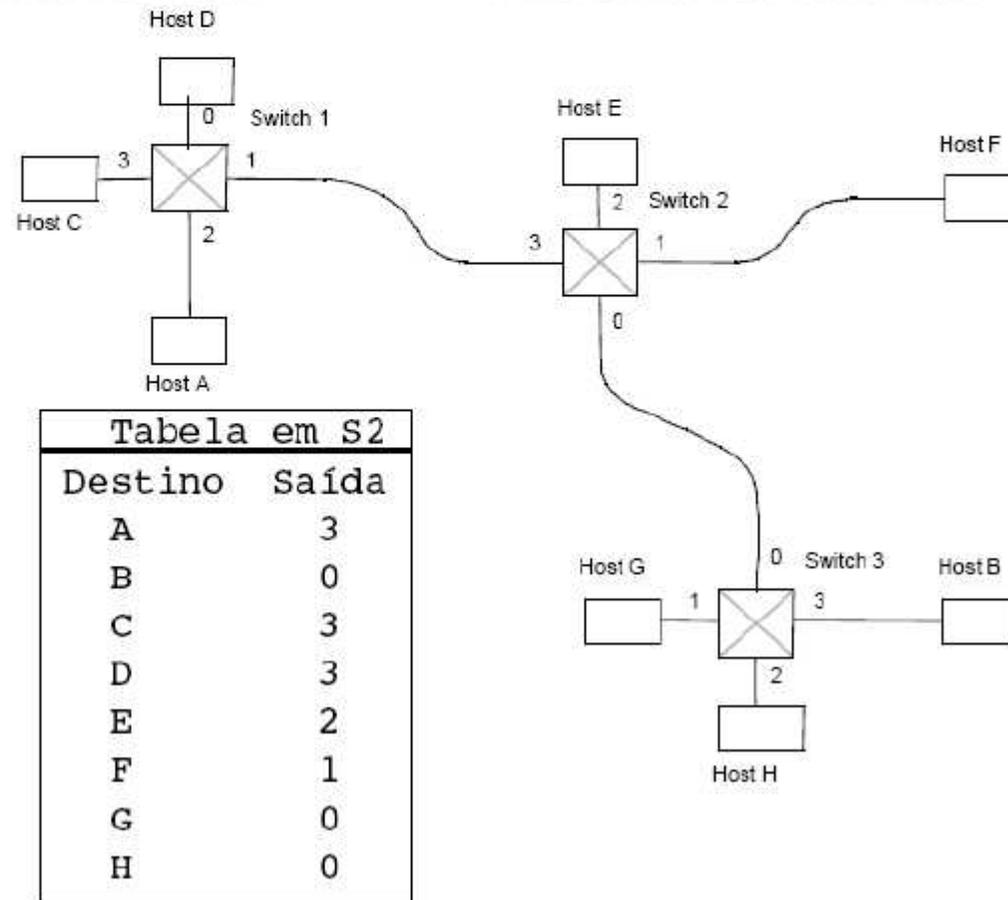
- Apesar das redes de computadores serem complexas no mundo real, onde inúmeros fatores descrevem o ambiente....



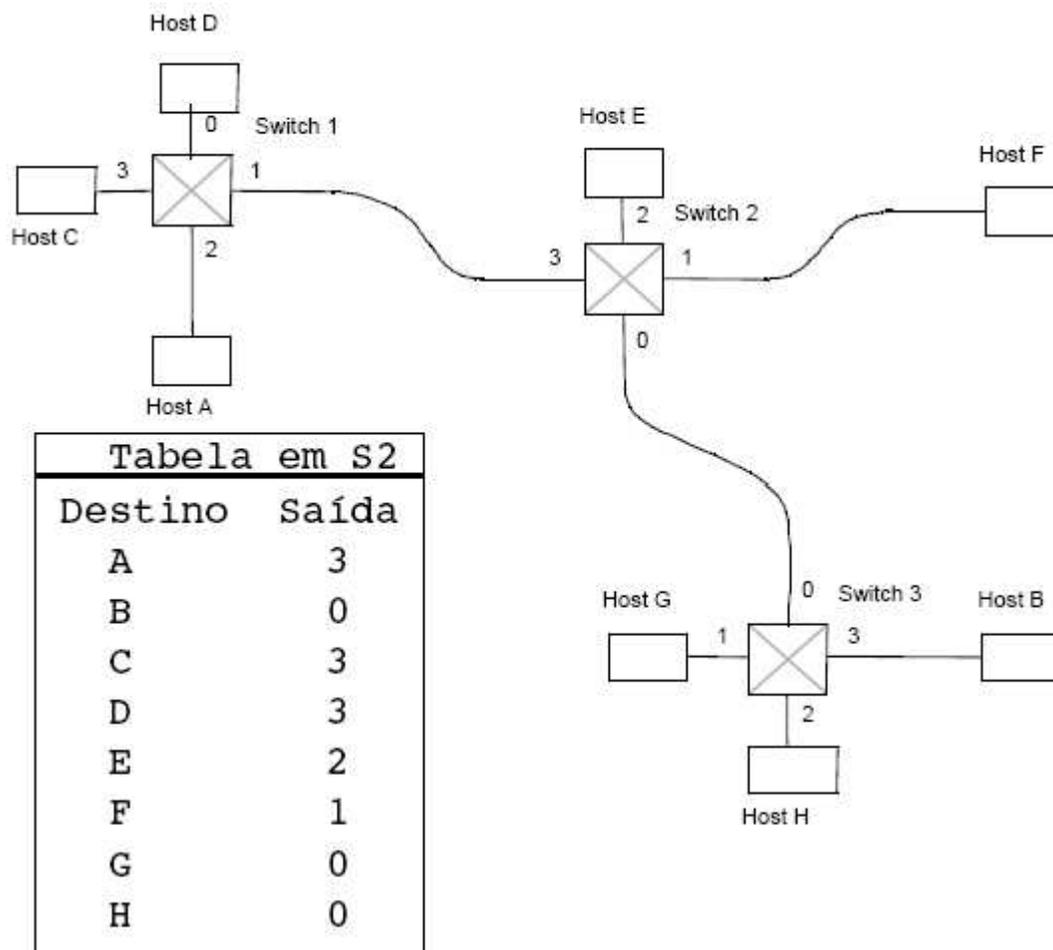
- **É necessária uma forma de abstração para a eficiente comunicação dos computadores.**

Exemplo de aplicação: Redes de computadores

- Redes de computadores utilizam tabelas de encaminhamento para o roteamento de pacotes...



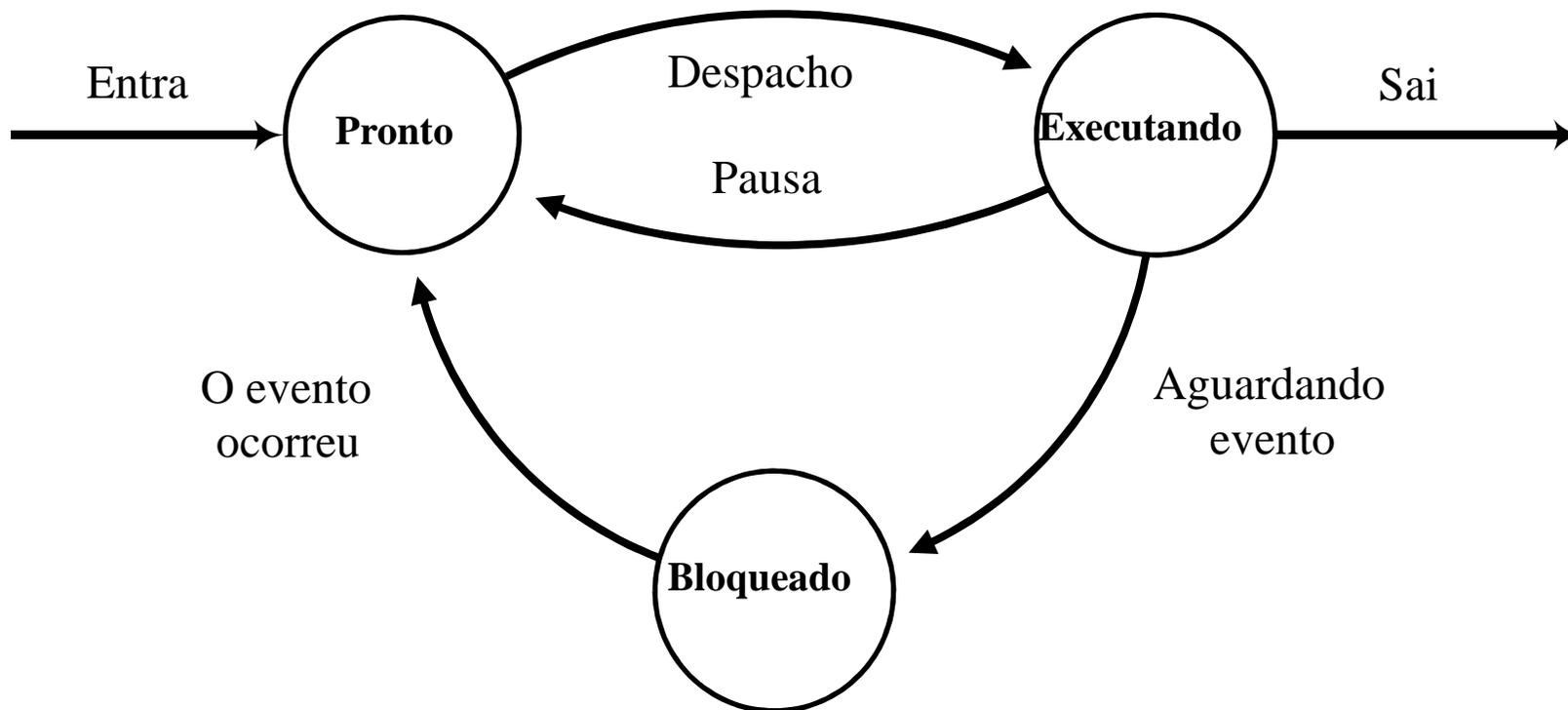
Exemplo de aplicação: Redes de computadores



- Que informações podemos utilizar para montar as tabelas de encaminhamento de cada *switch*?

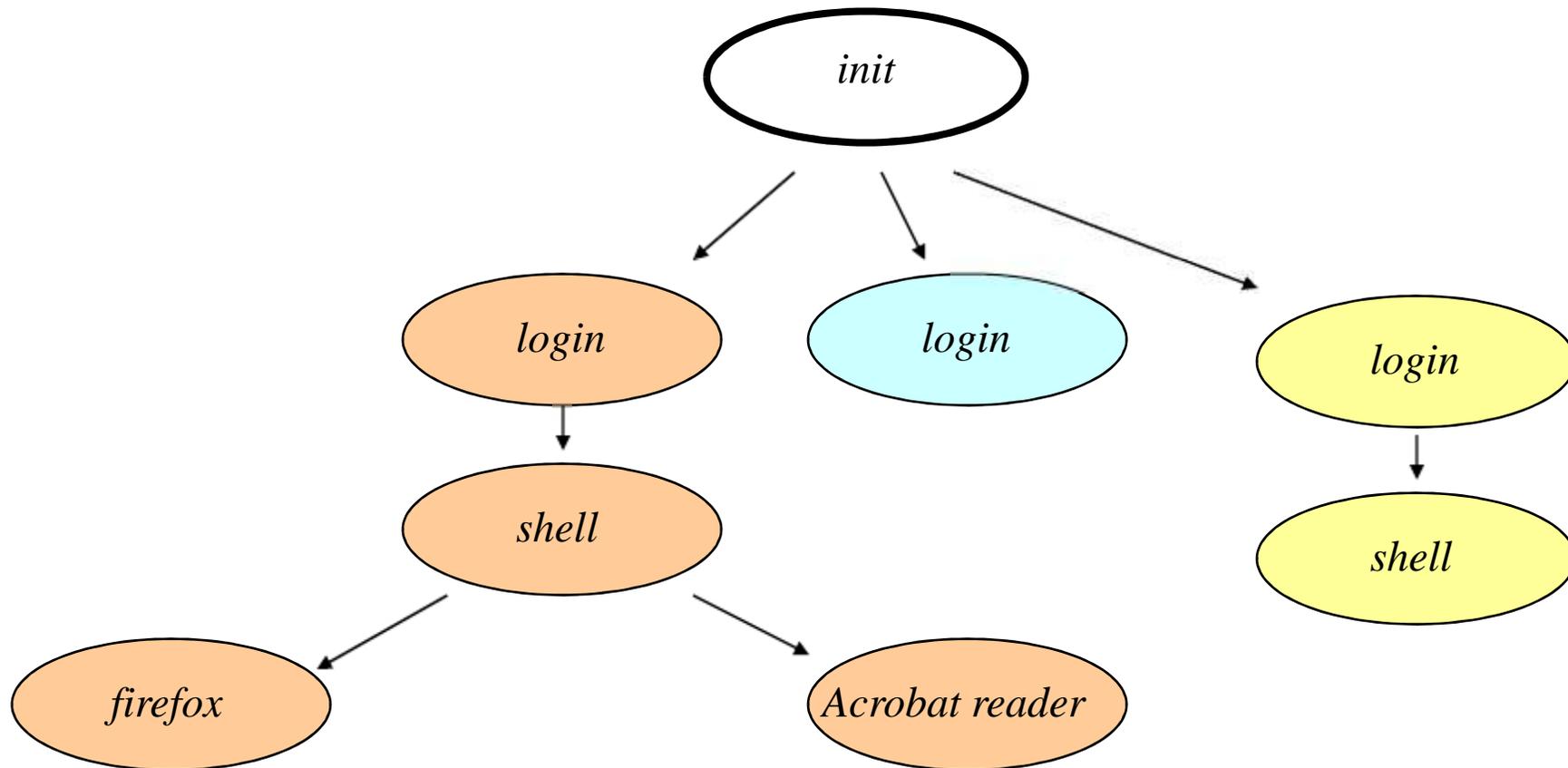
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Abstraindo... Entendendo os estados de processos/*threads*...



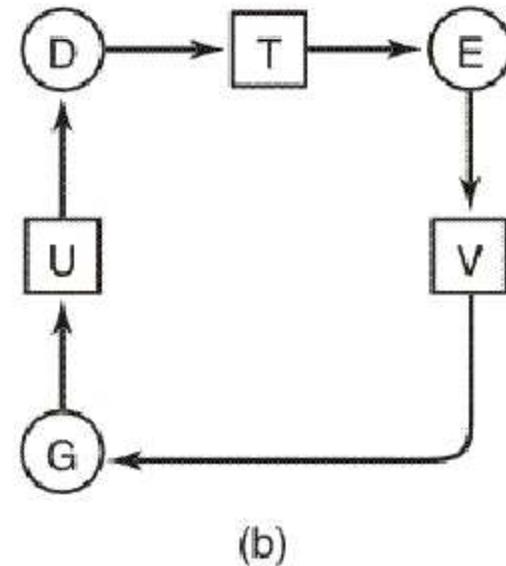
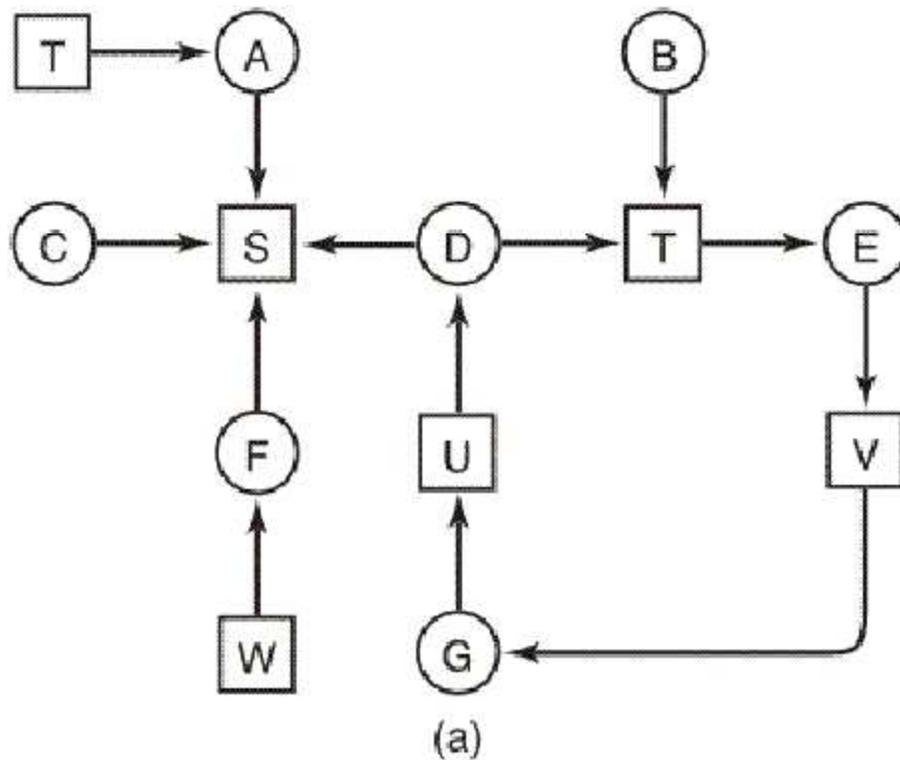
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- Hierarquia de Processos – Árvores são grafos especiais...



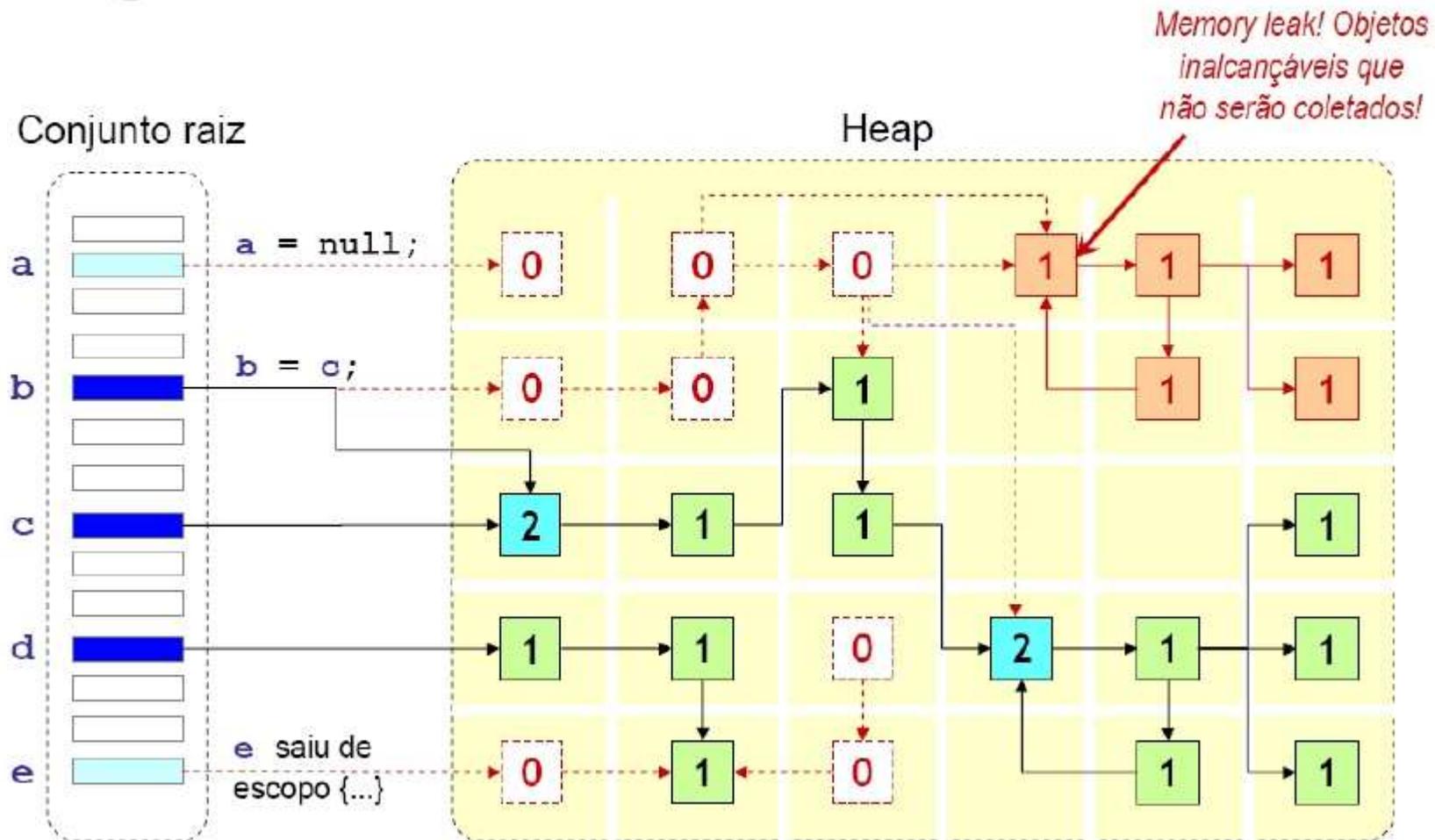
Exemplo de aplicação: Sistemas Operacionais

- *Detecção de deadlock* através de ciclo no grafo...



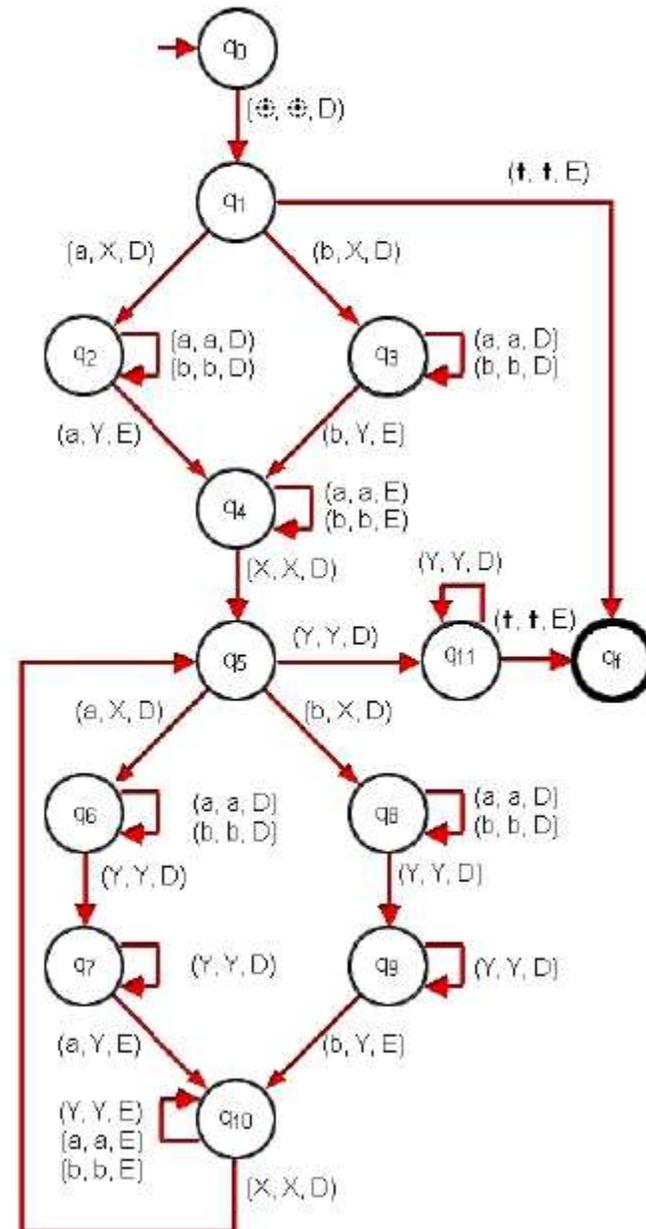
Exemplo de aplicação: Programação...

- **Garbage collector** - Java



Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

- Reconhecimento de textos de uma língua/linguagem qualquer.
 - Ex.: C++, Java, Português...
- Aplicação:
 - Detecção de erros sintáticos em frases de um documento por Máquinas de Turing ou Máquina equivalente.



Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

- **Reconhecimento de linguagens...**

Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Recursivamente enumerável	Máquina de Turing
--	Estrutura de frase	Recursiva	Máquina de Turing
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

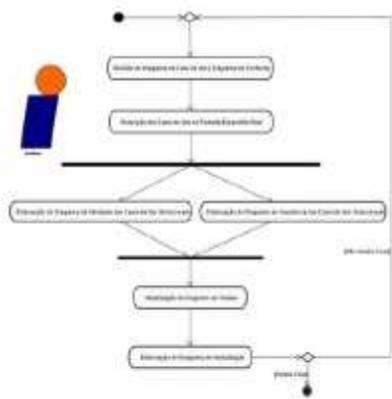
- Todas estas estruturas (reconhecedores) possuem representação através de Grafos.

Exemplo de aplicação: Teoria da Computação

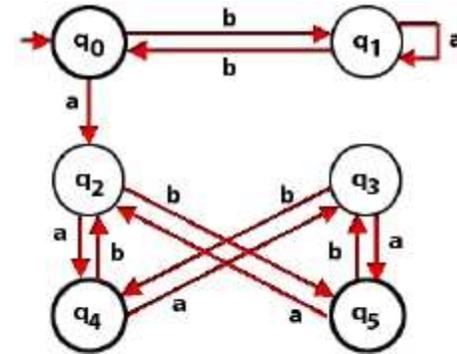
Teoria de Autômatos: Linguagem formal e gramática formal			
Hierarquia Chomsky	Gramática	Linguagem	Reconhecedor
Tipo-0	Estrutura de frase	Recursivamente enumerável	Máquina de Turing
–	Estrutura de frase	Recursiva	Máquina de Turing
Tipo-1	Sensíveis ao contexto	Sensíveis ao contexto	Máquina de Turing com memória limitada
Tipo-2	Livre de contexto	Livre de contexto	Autômato com pilha
Tipo-3	Regular	Regular	Autômato finito

- Curiosidade: Recentemente uma tribo da Amazônia colocou em xeque toda teoria de Chomsky (a teoria, não a hierarquia..)
- Eles não conseguem gerar sentenças recursivas;
- <http://www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ult306u16297.shtml>
- Segundo Chomsky, todos os humanos possuem a capacidade de gerar frases recursivas. Característica gravada no DNA.

Exemplo de aplicação: Teoria da Computação e Engenharia de Software



Um requisito gera um diagrama de estados (UML)

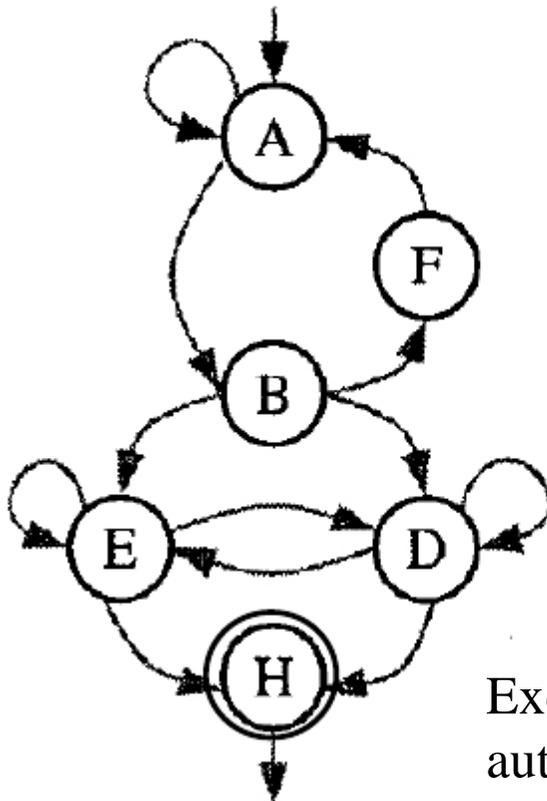


Um autômato

Exemplo de aplicação:

Teoria da Computação e Engenharia de Software

Caso: Abrir arquivo



A: File
B: Open
D: Name
E: Select
F: Cancel
H: Open



Exemplo de seqüências reconhecidas pelo autômato:

w1: AB, BE, EH (menor palavra da linguagem)

w2: AA, AA, AA, AB, BF, AB, BE, EH

Exemplo de aplicação:

Teoria da Computação e Engenharia de Software

Caso: Abrir arquivo

- Teste de software tem uma importância singular na programação para celulares;
 - Imaginem um *recall* para atualizar o software da agenda telefônica de todos os celulares da Motorola....
- Este simples exemplo envolve Teoria dos Grafos, Teoria da Computação e Engenharia de Software...
 - Seja multidisciplinar dentro da Computação!!!

Atualmente...



Grafos na atualidade

- Da “era Euler” até os dias atuais, a teoria dos grafos se desenvolveu rapidamente;
- Eu a considero uma teoria estável e de grande bagagem para resolução da maioria dos problemas práticos;
- **Apesar da limitação computacional:**
 - Seja ela de complexidade,
 - Seja ela de decidibilidade;

Grafos na atualidade

- Muitos pesquisadores trabalham **atualmente** para criação de **eficientes algoritmos** em principalmente dois cenários:
 - Ambientes dinâmicos;
 - Ambientes distribuídos;

Grafos

